Πραγματικοι Αριθμοι

Σε αυτό το φυλλάδιο θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών και να δώσουμε τις βασικές ιδιότητες που το διέπουν. Το φυλλάδιο ξεκινάει με μια καταγραφή των βασικών αλγεβρικών ιδιοτήτων των δύο βασικών πράξεων, της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Στη συνέχεια δίνονται οι ιδιότητες της διάταξης και τέλος η ιδιότητα της πληρότητας. Όπως θα δούμε, όλες οι υπόλοιπες ιδιότητες των πραγματικών αριθμών προκύπτουν από τις 14 βασικές ιδιότητες που θα παραθέσουμε. Η δομή του φυλλαδίου ακολουθεί τη λογική του κλασσικού βιβλίου για τον Απειροστικό Λογισμό των Νεγρεπόντη, Γιωτόπουλο, Γιαννακούλια [1]. Σημειώνουμε ότι θα είμαστε αρκετά σχολαστικοί στη χρήση των βασικών ιδιοτήτων για να δείξουμε ότι πράγματι όλες οι υπόλοιπες έπονται τον κατάλογο των 14 βασικών ιδιοτήτων.

1 Ιδιοτητες της Προσθεσης $\Pi_1 - \Pi_4$

Στους πραγματικούς αριθμούς ορίζεται η πράξη της πρόσθεσης $+$. Συγκεκριμένα, για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο πραγματικό αριθμό $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$ (α συν β), ο οποίος θα είναι το άθροισμά τους. Η πράξη της πρόσθεσης ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες

Π_1 (Ύπαρξη του μηδενός): Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός, ο οποίος συμβολίζεται με 0, τέτοιος ώστε: $\alpha + 0 = \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Π_2 (Ύπαρξη αντιθέτου): Για κάθε πραγματικό αριθμό α, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός τον οποίο συμβολίζουμε με $-\alpha$ τέτοιος ώστε $\alpha + (-\alpha) = 0$. Ο αριθμός $-\alpha$ ονομάζεται αντίθετος του α.

Π_3 (Προσεταιριστική Ιδιότητα): Για κάθε τριάδα πραγματικών αριθμών α, β, γ ισχύει: $\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$. Με λίγα λόγια, η ιδιότητα Π_3 μας λέει ότι το άθροισμα τριών αριθμών θα είναι το ίδιο με όποια σειρά και αν εκτελέσουμε την πρόσθεση, είτε αν επιλέξουμε να σχηματίσουμε πρώτα το ενδιάμεσο άθροισμα $\beta+\gamma$ και μετά το τελικό άθροισμα $\alpha+(\beta+\gamma)$, είτε αν επιλέξουμε να σχηματίσουμε πρώτα το ενδιάμεσο άθροισμα $\alpha+\beta$ και μετά το τελικό άθροισμα $(\alpha+\beta)+\gamma$. Γι αυτό μπορούμε να γράφουμε απλά $\alpha + \beta + \gamma$.

Π_4 (Αντιμεταθετική ιδιότητα): Για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Τονίζουμε ότι η πράξη της αφαίρεσης ορίζεται ως εξής: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$. Από τις ιδιότητες $\Pi_1 - \Pi_4$ άμεσα προκύπτουν πολλές άλλες που έχουμε μάθει να χρησιμοποιούμε από το Γυμνάσιο. Για παράδειγμα, θα δείξουμε ότι το μηδέν είναι μοναδικό, ότι ο αντίθετος ενός αριθμού είναι μοναδικός και ότι μπορούμε να κάνουμε απλοποίηση σε ισότητα.

Πρόταση 1 (Μοναδικότητα του μηδενός)**.** *Ο αριθμός 0 είναι ο μοναδικός πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει η ιδιότητα* Π_1.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας δεύτερος πραγματικός αριθμός $\mu \neq 0$ που ικανοποιεί την ιδιότητα Π_1, δηλαδή ισχύει $\alpha + \mu = \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε, αν στη θέση του α βάλουμε το 0, θα έχουμε $0 + \mu = 0$. Επιπλέον, από την Π_1 και την Π_4 για τον αριθμό μ θα έχουμε: $\mu + 0 = 0 + \mu = \mu$. Συμπεραίνουμε ότι $\mu = 0$, που είναι άτοπο. ☐

Πρόταση 2 (Μοναδικότητα του αντιθέτου)**.** *Για κάθε αριθμό* $\alpha \in \mathbb{R}$, *ο αντίθετός του* $-\alpha$ *είναι ο μοναδικός πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει η* Π_2.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας δεύτερος πραγματικός αριθμός $\beta \neq -\alpha$ που ικανοποιεί την ιδιότητα Π_2, δηλαδή ισχύει $\alpha + \beta = 0$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
\beta &= \beta + 0 && (\text{από την } \Pi_1)\\
&= \beta + (\alpha + (-\alpha)) && (\text{από την } \Pi_2)\\
&= (\beta + \alpha) + (-\alpha) && (\text{από την } \Pi_3)\\
&= (\alpha + \beta) + (-\alpha) && (\text{από την } \Pi_4)\\
&= 0 + (-\alpha) && (\text{από την υπόθεση})\\
&= (-\alpha) + 0 && (\text{από την } \Pi_4)\\
&= -\alpha && (\text{από την } \Pi_1),
\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. ☐

Πρόταση 3 (Κανόνας απλοποίησης της πρόσθεσης)**.** *Αν οι* α, β, γ *είναι πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε* $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, *τότε ισχύει ότι* $\alpha = \beta$.

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha + 0 && (\text{από την } \Pi_1)\\
&= \alpha + (\gamma + (-\gamma)) && (\text{από την } \Pi_2)\\
&= (\alpha + \gamma) + (-\gamma) && (\text{από την } \Pi_3)\\
&= (\beta + \gamma) + (-\gamma) && (\text{από υπόθεση})\\
&= \beta + (\gamma + (-\gamma)) && (\text{από την } \Pi_3)\\
&= \beta + 0 && (\text{από την } \Pi_2)\\
&= \beta && (\text{από την } \Pi_1).
\end{aligned}$$

☐

2 Ιδιοτητες του Πολλαπλασιασμου $\Pi_5 - \Pi_8$

Εκτός από την πρόσθεση, στους πραγματικούς αριθμούς μπορούμε να ορίσουμε και την πράξη του πολλαπλασιασμού. Συγκεκριμένα, για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο πραγματικό αριθμό $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$ (α επί β), ο οποίος θα είναι το γινόμενό τους. Για τον πολλαπλασιασμό έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

Π_5 (Ύπαρξη της μονάδας): Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός, ο οποίος συμβολίζεται με 1, τέτοιος ώστε: $\alpha \cdot 1 = \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Π_6 (Ύπαρξη αντιστρόφου): Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός, τον οποίο συμβολίζουμε με $\frac{1}{\alpha}$, τέτοιος ώστε $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$. Ο αριθμός $\frac{1}{\alpha}$ ονομάζεται αντίστροφος του α.

Π_7 (Προσεταιριστική Ιδιότητα): Για κάθε τριάδα πραγματικών αριθμών α, β, γ ισχύει: $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$. Με λίγα λόγια, η ιδιότητα Π_7 μας λέει ότι το γινόμενο τριών αριθμών θα είναι το ίδιο με όποια σειρά και αν εκτελέσουμε τον πολλαπλασιασμό, είτε αν επιλέξουμε να σχηματίσουμε πρώτα το ενδιάμεσο γινόμενο $\beta \cdot \gamma$ και μετά το τελικό γινόμενο $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$, είτε αν επιλέξουμε να σχηματίσουμε πρώτα το ενδιάμεσο γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ και μετά το τελικό γινόμενο $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$. Γι αυτό μπορούμε να γράφουμε απλά $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$.

Π_8 (Αντιμεταθετική ιδιότητα): Για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

Η διαίρεση ορίζεται μέσω του αντίστροφου στοιχείου του πολλαπλασιασμού ως εξής: $\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$, για $\beta \neq 0$. Όπως και στην περίπτωση της πρόσθεσης, από τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτουν πολλές άλλες που έχουμε μάθει να χρησιμοποιούμε από το Γυμνάσιο. Για παράδειγμα, κατ΄ αναλογία με την πρόσθεση, θα δείξουμε ότι η μονάδα είναι μοναδική, ότι ο αντίστροφος ενός αριθμού είναι μοναδικός και ότι μπορούμε να κάνουμε απλοποίηση σε ισότητα.

Πρόταση 4 (Μοναδικότητα της μονάδας)**.** *Ο αριθμός 1 είναι ο μοναδικός πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει η ιδιότητα* Π_5.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας δεύτερος πραγματικός αριθμός $\mu \neq 1$ που ικανοποιεί την ιδιότητα Π_5, δηλαδή ισχύει $\alpha \cdot \mu = \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε, αν στη θέση του α βάλουμε το 1, θα έχουμε $1 \cdot \mu = 1$. Επιπλέον, από την Π_5 και την Π_8 για τον αριθμό μ θα έχουμε: $\mu \cdot 1 = 1 \cdot \mu = \mu$. Συμπεραίνουμε ότι $\mu = 1$, που είναι άτοπο. ☐

Πρόταση 5 (Μοναδικότητα του αντιστρόφου)**.** *Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$, ο αντίστροφός του $\frac{1}{\alpha}$ είναι ο μοναδικός πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει η* Π_6.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας δεύτερος πραγματικός αριθμός $\beta \neq \frac{1}{\alpha}$ που ικανοποιεί την ιδιότητα Π_6, δηλαδή για τον β θα ισχύει $\alpha \cdot \beta = 1$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
\beta &= \beta \cdot 1 && \text{(από την } \Pi_5\text{)}\\
&= \beta \cdot (\alpha \cdot \tfrac{1}{\alpha}) && \text{(από την } \Pi_6\text{)}\\
&= (\beta \cdot \alpha) \cdot \tfrac{1}{\alpha} && \text{(από την } \Pi_7\text{)}\\
&= (\alpha \cdot \beta) \cdot \tfrac{1}{\alpha}) && \text{(από την } \Pi_8\text{)}\\
&= 1 \cdot \tfrac{1}{\alpha} && \text{(από την υπόθεση)}\\
&= \tfrac{1}{\alpha} \cdot 1 && \text{(από την } \Pi_8\text{)}\\
&= \tfrac{1}{\alpha} && \text{(από την } \Pi_5\text{),}
\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. ☐

Πρόταση 6 (Κανόνας απλοποίησης του πολλαπλασιασμού)**.** *Αν οι α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ και $\gamma \neq 0$, τότε ισχύει ότι $\alpha = \gamma$.*

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha \cdot 1 && (\text{από την } \Pi_5)\\
&= \alpha \cdot (\gamma \cdot \tfrac{1}{\gamma}) && (\text{από την } \Pi_6)\\
&= (\alpha \cdot \gamma) \cdot \tfrac{1}{\gamma} && (\text{από την } \Pi_7)\\
&= (\beta \cdot \gamma) \cdot \tfrac{1}{\gamma} && (\text{από υπόθεση})\\
&= \beta \cdot (\gamma \cdot \tfrac{1}{\gamma}) && (\text{από την } \Pi_7)\\
&= \beta \cdot 1 && (\text{από την } \Pi_6)\\
&= \beta && (\text{από την } \Pi_5).
\end{aligned}$$

□

3 Η Επιμεριστική ιδιότητα Π_9

Οι 8 προηγούμενες ιδιότητες για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και δεν αλληλεπιδρούν. Η προσθήκη της επιμεριστικής ιδιότητας αλλάζει ουσιαστικά την κατάσταση αφού είναι η μόνη ιδιότητα που συνδέει της δύο πράξεις. Η επιμεριστική ιδιότητα είναι η παρακάτω:

Π_9 (Επιμεριστική Ιδιότητα): Για κάθε τριάδα πραγματικών αριθμών α, β, γ, ισχύει $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Παρακάτω δίνουμε μερικά ενδεικτικά παραδείγματα των ιδιοτήτων που μπορούμε να αποδείξουμε με χρήση όλων των $\Pi_1 - \Pi_9$.

Πρόταση 7 (Το 0 είναι απορροφητικό στοιχείο)**.** *Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha \cdot 0 = 0$.*

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot 0 &= \alpha \cdot 0 + 0 && (\text{από την } \Pi_1)\\
&= \alpha \cdot 0 + (\alpha + (-\alpha)) && (\text{ από την } \Pi_2)\\
&= (\alpha \cdot 0 + \alpha) + (-\alpha) && (\text{ από την } \Pi_3)\\
&= \alpha \cdot (0 + 1) + (-\alpha) && (\text{ από την } \Pi_9)\\
&= \alpha \cdot 1 + (-\alpha) &&\\
&= \alpha + (-\alpha) && (\text{ από την } \Pi_5)\\
&= 0 && (\text{ από την } \Pi_2)
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 8. *Αν $\alpha \cdot \beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$. Ισοδύναμα, αν $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ τότε $\alpha \cdot \beta \neq 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\alpha \cdot \beta = 0$ και $\alpha \neq 0$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι $\beta = 0$. Πράγματι,

$$\beta = 1 \cdot \beta = \left(\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \beta = \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\right) \cdot \beta = \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha \cdot \beta) = \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0.$$

□

Χρησιμοποιώντας τις $\Pi_1 - \Pi_9$ μπορούμε επιπλέον να δείξουμε ότι:

- Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$, τότε $\alpha + \gamma = \beta + \delta$. Το αντίστροφο προφανώς δεν ισχύει.

- Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta$. Το αντίστροφο προφανώς δεν ισχύει.

- Η εξίσωση $\alpha x = \beta$ έχει μοναδική λύση την $x_0 = \frac{\beta}{\alpha}$, αν $\alpha \neq 0$. Αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$ η εξίσωση δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$, ενώ αν $\alpha = \beta = 0$ η εξίσωση είναι ταυτότητα (δηλαδή την επαληθεύουν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί).

- $-(-\alpha) = \alpha$.

- $\frac{1}{\frac{1}{\alpha}} = \alpha$.

- $(-\alpha) + (-\beta) = -(\alpha + \beta)$.

- $(-\alpha) \cdot \beta = -(\alpha \cdot \beta)$.

- $(-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta$.

- Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\alpha \cdot \delta = \beta\gamma$ και αντιστρόφως (αν $\beta, \delta \neq 0$).

- Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$, και αντιστρόφως (αν $\beta, \delta \neq 0$).

- Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$.

Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε όλες τις ιδιότητες των δυνάμεων (που ξέρουμε από το Γυμνάσιο και το Λύκειο), όλες τις ταυτότητες, κ.λ.π.

4 Ιδιότητες Διάταξης $\Pi_{10} - \Pi_{13}$

Όπως ξέρουμε από το Γυμνάσιο, στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μπορούμε να ορίσουμε διάταξη. Συγκεκριμένα ορίζουμε ότι ένας πραγματικός αριθμός α είναι θετικός, αν $\alpha > 0$ και αρνητικός αν $\alpha < 0$. Οι βασικές ιδιότητες δίνονται παρακάτω:

Π_{10} (Μεταβατικότητα): Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ τότε $\alpha > \gamma$.

Π_{11} (Τριχοτομία): Για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών α, β ισχύει ακριβώς μια από τις παρακάτω σχέσεις: είτε $\alpha = \beta$, είτε $\alpha > \beta$, είτε $\alpha < \beta$.

Π_{12} : Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha > \beta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$, για κάθε πραγματικό αριθμό γ.

Π_{13} : Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha > \beta$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$, για κάθε πραγματικό αριθμό $\gamma > 0$.

Με βάση τα παραπάνω προκύπτουν όλες οι υπόλοιπες γνωστές ιδιότητες της διάταξης. Παρακάτω δίνουμε μερικές ενδεικτικές αποδείξεις.

Πρόταση 9. *Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.*

Απόδειξη. Αφού $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, από την Π_{12} θα έχουμε ότι αντίστοιχα ότι $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ και $\beta + \gamma > \beta + \delta$. Επομένως (χρησιμοποιώντας την Π_{10}) θα έχουμε ότι $\alpha + \gamma > \beta + \delta$. □

Πρόταση 10. *Αν $\alpha > 0$, τότε $-\alpha < 0$.*

Απόδειξη. Από την ιδιότητα της τριχοτομίας έχουμε ότι είτε $-\alpha = 0$, είτε $-\alpha > 0$, είτε $-\alpha < 0$. Έστω ότι $-\alpha = 0$, τότε θα είχαμε και $\alpha = 0$, το οποίο είναι άτοπο. Έστω τώρα ότι $-\alpha > 0$. Σε αυτή την περίπτωση, αφού $\alpha > 0$ θα είχαμε ότι $\alpha - \alpha > 0$ (προηγούμενη πρόταση). Όμως $\alpha - \alpha = 0$, δηλαδή αποδείξαμε ότι $0 > 0$, το οποίο είναι άτοπο. ☐

Πρόταση 11. *Αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha - \beta > 0$ και αντιστρόφως.*

Απόδειξη. Αν $\alpha > \beta$, τότε από την Π_{12} έχουμε $\alpha - \beta > \beta - \beta = 0$. αντιστρόφως, αν $\alpha - \beta > 0$, τότε από την Π_{12} έχουμε $\alpha - \beta + \beta > \beta$, επομένως $\alpha > \beta$. ☐

Πρόταση 12. *Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, τότε $\alpha \cdot \beta > 0$. Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, τότε $\alpha \cdot \beta < 0$. Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$, τότε $\alpha \cdot \beta > 0$.*

Απόδειξη. Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, τότε από την Π_{13} προκύπτει άμεσα ότι $\alpha \cdot \beta > 0$. Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, τότε πάλι από την Π_{13} έχουμε $0 > \beta$ και $\alpha > 0$, άρα $\alpha \cdot 0 > \alpha \cdot \beta$, δηλαδή $0 > \alpha \cdot \beta$. Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$, τότε από προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι $-\alpha > 0$ και $-\beta > 0$. Επομένως (όμοια με την πρώτη περίπτωση), θα έχουμε $(-\alpha) \cdot (-\beta) > 0$. Άρα $\alpha \cdot \beta > 0$. ☐

Πρόταση 13. *Αν $\alpha \neq 0$, τότε $\alpha^2 > 0$.*

Απόδειξη. Αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha^2 > 0$, από την Π_{13}. Αν $\alpha < 0$ τότε από την προηγούμενη πρόταση θα έχουμε $\alpha \cdot \alpha > 0$, άρα $\alpha^2 > 0$. ☐

Πρόταση 14. *Έχουμε $1 > 0$, $1 + 1 > 0$.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $1 \neq 0$, άρα $1 = 1^2 > 0$. Αφού $1 > 0$, θα έχουμε $1 + 1 > 0 + 1$. Άρα $1 + 1 > 0$. ☐

Με παρόμοιες τεχνικές μπορούμε να αποδείξουμε τα παρακάτω:

- Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$.
- Αν α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$ και ν θετικός ακέραιος, τότε $\alpha^\nu > \beta^\nu$ και αντιστρόφως.
- Αν α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$ και ν θετικός ακέραιος, τότε $\alpha^\nu = \beta^\nu$ και αντιστρόφως.
- Αν α, β είναι ομόσημοι αριθμοί, τότε $\alpha < \beta$ αν και μόνο αν $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.

5 Η Απολυτη Τιμη

Έστω α ένας πραγματικός αριθμός. Ορίζουμε ως απόλυτη τιμή του α (την οποία συμβολίζουμε ως $|\alpha|$), την απόσταση του αριθμού α από το 0. Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}.$$

Εύκολα, μπορούμε να αποδείξουμε τις επόμενες ιδιότητες:

- $|\alpha| \geq 0$.

- $|\alpha|^2 = \alpha^2$.
- Αν $|\alpha| = 0$, τότε $\alpha = 0$.
- $-\alpha \leq |\alpha| \leq \alpha$.
- $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.
- $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ (τριγωνική ανισότητα).
- Αν $|x| = \theta$, για κάποιον θετικό πραγματικό αριθμό θ, τότε $x = \theta$ ή $x = -\theta$.
- Αν $|x| \leq \theta$, για κάποιον θετικό πραγματικό αριθμό θ, τότε $-\theta \leq x \leq \theta$.
- Αν $|x| \geq \theta$, για κάποιον θετικό πραγματικό αριθμό θ, τότε $x \geq \theta$ ή $x \leq -\theta$.

6 Φυσικοι, Ακεραιοι, Ρητοι αριθμοι

Σε αυτή την παράγραφο θα αναφερθούμε στα σύνολα των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z}$ και των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$. Είναι γνωστό από το Γυμνάσιο ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}, \\ \mathbb{Q} &= \left\{ \frac{\mu}{\nu} : \ \mu \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{N}, \nu \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών, $\mathbb{N}$, ικανοποιεί τις ιδιότητες $\Pi_1, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_7, \Pi_8$ και $\Pi_9 - \Pi_{12}$, δηλαδή δεν ικανοποιεί τις ιδιότητες Π_2 και Π_6. Επίσης μπορεί να αποδειχθεί ότι το δεκαδικό ανάπτυγμα ενός φυσικού αριθμού είναι μοναδικό:

Πρόταση 15. *Για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί αριθμοί $a_0, a_1, \dots, a_k$ με $0 \leq a_1, a_2, \dots, a_k \leq 9$ και $a_k \neq 0$, ώστε*

$$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_k \cdot 10^k.$$

Το σύνολο των ακεραίων αριθμών, $\mathbb{Z}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες $\Pi_1 - \Pi_5$ και $\Pi_7 - \Pi_{13}$, δηλαδή δεν ικανοποιεί την Π_6. Το σύνολο των ρητών αριθμών, $\mathbb{Q}$, ικανοποιεί και τις 13 ιδιότητες των πραγματικών αριθμών ($\Pi_1 - \Pi_{13}$).

7 Η ιδιοτητα της Πληροτητας - Π_{14}

Στην παράγραφο αυτή αναφερόμαστε στην ιδιότητα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών και δίνουμε μερικές απλές συνέπειές τη•, όπως για παράδειγμα την Αρχιμήδεια ιδιότητα. Η έννοια της πληρότητας είναι θεμελιώδης για την ανάπτυξη του Απειροστικού λογισμού. Μπορούμε να πούμε ότι όλα τα σημαντικά θεωρήματα του Απειροστικού λογισμού βασίζονται κατά τρόπο ουσιαστικό στην έννοια της πληρότητας. Προτού αναφέρουμε την ιδιότητα της πληρότητας, θα δώσουμε κάποιους ορισμούς που είναι αναγκαίοι.

Ορισμός 1. *Ένα υποσύνολο A είναι*

- *άνω φραγμένο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε $x \leq M$, για κάθε $x \in A$. Τότε ο αριθμός M είναι ένα άνω φράγμα του A.*

- *κάτω φραγμένο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε $x \geq M$, για κάθε $x \in A$. Τότε ο αριθμός M είναι ένα κάτω φράγμα του A.*

- *φραγμένο αν είναι άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να βρούμε αριθμό M τέτοιο ώστε $|x| \leq M$, για κάθε $x \in A$.*

Ας δούμε μερικά απλά παραδείγματα:

1. Το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι κάτω φραγμένο (π.χ. από το 0) αλλά όχι άνω φραγμένο.

2. το σύνολο $\mathbb{R}$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένο ούτε κάτω φραγμένο.

3. Το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 \leq x \leq 1\}$ είναι φραγμένο.

4. Το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών είναι κάτω φραγμένο σύνολο (αλλά όχι άνω φραγμένο).

5. το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι φραγμένο.

Παρατηρούμε ότι αν ένα σύνολο, A, είναι άνω φραγμένο, υπάρχουν πολλά άνω φράγματα γι αυτό. Πράγματι, αν ο αριθμός M είναι ένα άνω φράγμα του A τότε και ο αριθμοί $M+1, M+2, \ldots$ είναι επίσης άνω φράγματα. Χρειαζόμαστε, επομένως, τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2: Supremum - Infimum

Έστω A ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Ο πραγματικός αριθμός M θα λέγεται ελάχιστο άνω φράγμα του A, ή supremum του A και θα συμβολίζεται με $M = \sup A$, αν:

- *ο M είναι ένα άνω φράγμα του A και*

- *αν ο M' είναι ένα άλλο άνω φράγμα του A, τότε $M \leq M'$.*

Ο πραγματικός αριθμός M θα λέγεται μέγιστο κάτω φράγμα του A, ή infimum του A και θα συμβολίζεται με $M = \inf A$, αν:

- *ο M είναι ένα κάτω φράγμα του A και*

- *αν ο M' είναι ένα άλλο κάτω φράγμα του A, τότε $M \geq M'$.*

Πρόταση 16. *Αν το σύνολο A έχει supremum τότε αυτό είναι μοναδικό. Ομοίως, αν το σύνολο A έχει supremum τότε αυτό είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο A έχει δύο ελάχιστα άνω φράγματα, τα M, M'. Αφού το M είναι ελάχιστο άνω φράγμα, τότε κάθε άλλο φράγμα θα είναι μεγαλύτερο από το M, δηλαδή θα έχουμε $M \leq M'$. Ομοίως, αφού και το M' είναι ελάχιστο άνω φράγμα, κάθε άλλο φράγμα θα είναι μεγαλύτερο από το M', δηλαδή $M' \leq M$. Επομένως $M = M'$. Ομοίως γίνεται και η απόδειξη για το infimum. □

Σε αυτό το σημείο είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε την 14η ιδιότητα των πραγματικών αριθμών:

Π_{14} - Ιδιότητα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών

> Αν το A είναι ένα μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε το A έχει supremum.

Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες που θέτει η Π_{14} είναι οι ελάχιστες δυνατές. Αν το σύνολο A είναι το κενό, τότε κάθε αριθμός είναι ένα άνω φράγμα. Επομένως αποκλείεται το $\emptyset$ να έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Αν πάλι το A δεν είναι άνω φραγμένο, τότε δεν είναι δυνατόν να έχει supremum. Επομένως, η Π_{14} μας εξασφαλίζει ότι όλα τα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών που μπορούν να έχουν supremum πράγματι έχουν. Τονίζουμε ότι ιδιότητα Π_{14} είναι υπαρξιακή και προβλέπει την ύπαρξη όσο το δυνατόν περισσότερων πραγματικών αριθμών, αν και δεν δίνει κάποια κατασκευαστική διαδικασία που να παράγει τους αριθμούς αυτούς. Μιλώντας πιο χαλαρά, μπορούμε να πούμε η Π_{14} (σε συνδυασμό με τις υπόλοιπες ιδιότητες) υπονοεί ότι μπορούμε να τοποθετήσουμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς σε μια ευθεία (άπειρου μήκους) η οποία δεν θα έχει καθόλου 'κενά'. Δηλαδή, κάθε σημείο αυτής της ευθείας θα αντιστοιχίζεται σε ένα (και μόνο) ένα πραγματικό αριθμό. Ας δούμε μερικές σημαντικές συνέπειες της Π_{14}.

Πρόταση 17 (Ύπαρξη του αριθμού $\sqrt{2}$). *Υπάρχει ένας μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός a, ώστε $a^2 = 2$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $A = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 < 2\}$. Αφού το A είναι φραγμένο, από την ιδιότητα της πληρότητας θα υπάρχει αριθμός $a = \sup A$. Προφανώς $a \geq 1 > 0$, αφού $1 \in A$ και $a \leq 2$ αφού το 2 είναι ένα άνω φράγμα του A. Θα αποδείξουμε ότι $a^2 = 2$. Πράγματι, αν $a \neq 2$, τότε (από την ιδιότητα της τριχοτομίας) θα έχουμε είτε $a^2 < 2$, είτε $a^2 > 2$. Θα αποδείξουμε ότι και οι δύο ισχυρισμοί είναι λανθασμένοι.

Έστω ότι $a^2 < 2$. Επιλέγουμε έναν πραγματικό αριθμό θ τέτοιο ώστε $0 < \theta < 1$ και $a^2 < a^2 + \theta < 2$. Ένας τέτοιος αριθμός είναι για παράδειγμα ο $\theta = \frac{2-a^2}{2}$, αλλά υπάρχουν άπειροι άλλοι. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $\theta = \frac{2-a^2}{2} > 0$, αφού $a^2 < 2$ και ότι $\frac{2-a^2}{2} < 1$, αφού $a^2 > 0$. Επίσης, $a^2 + \theta = \frac{2+a^2}{2}$ και ισχύει ότι $a^2 < \frac{2+a^2}{2} < 2$, αφού $a^2 < 2$. Παίρνουμε τον αριθμό $a + \frac{\theta}{10}$, για τον οποίο έχουμε ότι $a < a + \frac{\theta}{10}$, επομένως $\left(a + \frac{\theta}{10}\right)^2 \geq 2$, αφού $a = \sup A$. Επίσης,

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{\theta}{10}\right)^2 &= a^2 + \frac{\theta}{100} + \frac{2a\theta}{10} = a^2 + \theta\left(\frac{\theta}{100} + \frac{2a}{10}\right)\\ &< a^2 + \theta\left(\frac{1}{100} + \frac{4}{10}\right) < a^2 + \theta < 2.\end{aligned}$$

Επομένως, καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν υποθέσουμε ότι $a^2 > 2$ μπορούμε να καταλήξουμε σε άτοπο με παρόμοιο τρόπο. Σε αυτή την περίπτωση, επιλέγουμε θ τέτοιο ώστε $0 < \theta < 1$ και $2 < a^2 - \theta < a^2$. Για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε τον αριθμό $\theta = \frac{a^2-2}{2}$. Αν θεωρήσουμε τον αριθμό $a - \frac{\theta}{10}$, τότε θα έχουμε $a - \frac{\theta}{10} < a$, άρα $\left(a - \frac{\theta}{10}\right)^2 > 2$ (σε αντίθετη περίπτωση δεν θα είχαμε $a = \sup A$). Όμως

$$\begin{aligned}\left(a - \frac{\theta}{10}\right)^2 &= a^2 + \frac{\theta}{100} - \frac{2a\theta}{10} = a^2 - \theta\left(\frac{2a}{10} - \frac{\theta}{100}\right)\\ &> a^2 - \theta\left(\frac{4}{10}\right) > a^2 - \theta > 2.\end{aligned}$$

Επομένως, καταλήγουμε σε άτοπο και σε αυτή την περίπτωση. Άρα $a^2 = 2$. □

Πρόταση 18. *Ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει ρητός αριθμός $a = \frac{\mu}{\nu}$, με $\mu \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \neq 0$, τέτοιος ώστε $a^2 = 2$. Υποθέτουμε ότι το κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ είναι σε απλοποιημένη μορφή, δηλαδή οι αριθμοί μ, ν δεν έχουν κοινούς διαιρέτες. Τότε θα έχουμε $a^2 = \frac{\mu^2}{\nu^2}$, δηλαδή $\mu^2 = 2\nu^2$. από εδώ συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός μ^2 είναι άρτιος. Αυτό σημαίνει ότι και ο αριθμός μ είναι άρτιος (πράγματι, αν ο μ ήταν περιττός, δηλαδή $\mu = 2k+1$ μπορούμε να δείξουμε ότι και ο $\mu^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k+2) + 1$ είναι περιττός). Άρα θα υπάρχει αριθμός $\lambda \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $\mu = 2\lambda$. Επομένως $\mu^2 = 4\lambda^2$ και άρα $4\lambda^2 = 2\nu^2$. Η τελευταία σχέση δίνει $2\lambda^2 = \nu^2$, δηλαδή και ο αριθμός ν είναι άρτιος. Άρα οι αριθμοί μ, ν έχουν κοινό διαιρέτη τον αριθμό 2. Άτοπο. □

Από την προηγούμενη πρόταση είναι προφανές ότι η ιδιότητα της πληρότητας δεν ισχύει για τους ρητούς αριθμούς. Για παράδειγμα, μπορούμε να πάρουμε το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{Q} : \; x^2 < 2\}$. Το σύνολο A έχει supremum και μάλιστα $\sup A = \sqrt{2}$ (μπορούμε να το αποδείξουμε με παρόμοιο τρόπο όπως στην πρόταση 17). Όμως ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός. Επιπλέον, είναι προφανές ότι $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$. Οι πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι ρητοί καλούνται άρρητοι.

Θεώρημα 19: Αρχιμήδεια Ιδιότητα

Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών δεν είναι φραγμένο.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο. Τότε, με βάση την ιδιότητα της πληρότητας, θα υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $a = \sup \mathbb{N}$. Όμως θα έχουμε ότι $a - 1 < a$ και άρα ο αριθμός $a - 1$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. Θα υπάρχει λοιπόν ένας φυσικός αριθμός $n > a - 1$ και άρα $a < n + 1$. Αυτό είναι άτοπο αφού $a = \sup \mathbb{N}$. □

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι ρητοί αριθμοί δεν ικανοποιούν την ιδιότητα της πληρότητας. ικανοποιούν όμως την Αρχιμήδεια ιδιότητα.

Πρόταση 20

Για κάθε πραγματικό αριθμό $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\frac{1}{n} < \epsilon$.

Απόδειξη. Εφ' όσον το σύνολο $\mathbb{N}$ δεν είναι φραγμένο, ο αριθμός $\frac{1}{\epsilon}$ δεν είναι ένα άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. Επομένως, θα υπάρχει φυσικός αριθμός $n \neq 0$ τέτοιος ώστε $\frac{1}{\epsilon} < n$, δηλαδή $\frac{1}{n} < \epsilon$. □

Πρόταση 21. *Για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει ένας μοναδικός ακέραιος αριθμός ν τέτοιος ώστε $\nu \leq x < \nu + 1$. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται ακέραιο μέρος του x και συμβολίζεται με $[x]$.*

Ολοκληρώνουμε την παράγραφο με ένα τελευταίο σημαντικό αποτέλεσμα:

Πρόταση 22 (Η πυκνότητα των Ρητών)**.** *Αν a, b είναι πραγματικοί αριθμοί με $a < b$, τότε υπάρχει ένας ρητός αριθμός c, τέτοιος ώστε $a < c < b$. Δηλαδή μεταξύ δύο οποιονδήποτε πραγματικών αριθμών υπάρχει ένας ρητός αριθμός.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την ιδιότητα στην περίπτωση που $a \geq 0$. Παίρνουμε έναν φυσικό αριθμό ν τέτοιο ώστε $\frac{1}{\nu} < b-a$. Θέτουμε $A = \left\{k \in \mathbb{N} : \frac{k}{n} > a\right\}$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα συμπεραίνουμε ότι το σύνολο A δεν είναι κενό (αν ήταν κενό θα είχαμε $k \leq n \cdot a$ για όλους τους φυσικούς αριθμούς k, δηλαδή το $\mathbb{N}$ θα ήταν φραγμένο). Επομένως, από την αρχή της καλής διάταξης (κάθε υποσύνολο των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο) θα υπάρχει το ελάχιστο στοιχείο k που ικανοποιεί $\frac{k}{n} > a \geq \frac{k-1}{n}$. Επίσης,

$$\frac{k-1}{n} = \frac{k}{n} - \frac{1}{n} < \frac{k}{n} - (b-a).$$

Οπότε, $a > \frac{k}{n} - (b-a)$, δηλαδή $b > \frac{k}{n}$. Έχουμε δηλαδή $b > \frac{k}{n} > a$. Επιλέγουμε $c = \frac{k}{n}$. □

8 Ασκησεις

1. Αποδείξτε ότι η ιδιότητα της πληρότητας είναι ισοδύναμη με την εξής: Αν A είναι ένα μη κενό κάτω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών, τότε το A έχει infimum.

2. Υπολογίστε τα supremum, infimum των συνόλων (αν υπάρχουν):

   (α′) $\{x > 0 : 0 < x^2 \leq 1\}$

   (β′) $\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, 0 \leq x^2 \leq 2\}$

   (γ′) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, 0 \leq x^2 \leq 2\}$

   (δ′) $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^*\right\}$

   (ε′) $\{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$

   (ϛ′) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$

3. Έστω A ένα φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών με δύο τουλάχιστον στοιχεία. Αποδείξτε ότι $a = \sup A$, αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε

   (α′) $a < b + \epsilon$, για κάθε $a \in A$,

   (β′) $b - \epsilon < a$ για ένα τουλάχιστον $a \in A$.

4. Έστω A ένα μη κενό φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών. Αν $a \in A$ είναι ένα άνω φράγμα του A, αποδείξτε ότι $a = \sup A$.

5. Αν A, B είναι μη κενά φραγμένα υποσύνολα πραγματικών αριθμών, τότε το $A \cup B$ είναι φραγμένο και ισχύουν $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ και $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$

6. Αν A, B είναι μη κενά φραγμένα υποσύνολα πραγματικών αριθμών, και το $A \cup B$ είναι μη κενό, τότε το $A \cup B$ είναι φραγμένο και ισχύουν $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$ και $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$.

7. Έστω A φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών και B ένα μη κενό υποσύνολο του A. αποδείξτε ότι $\inf A \leq \inf B \sup B \leq A$.

8. Έστω A ένα σύνολο πραγματικών αριθμών, για το οποίο ισχύει $\sup A = \inf A$. Αποδείξτε ότι το A είναι μονοσύνολο.

9. Αν για τον αριθμό x ισχύει $0 \leq x < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι $x = 0$.

Βιβλιογραφια

[1] Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας Ε., 'Απειροστικός λογισμόσ', τόμος Ι, Αθήνα, 1987.