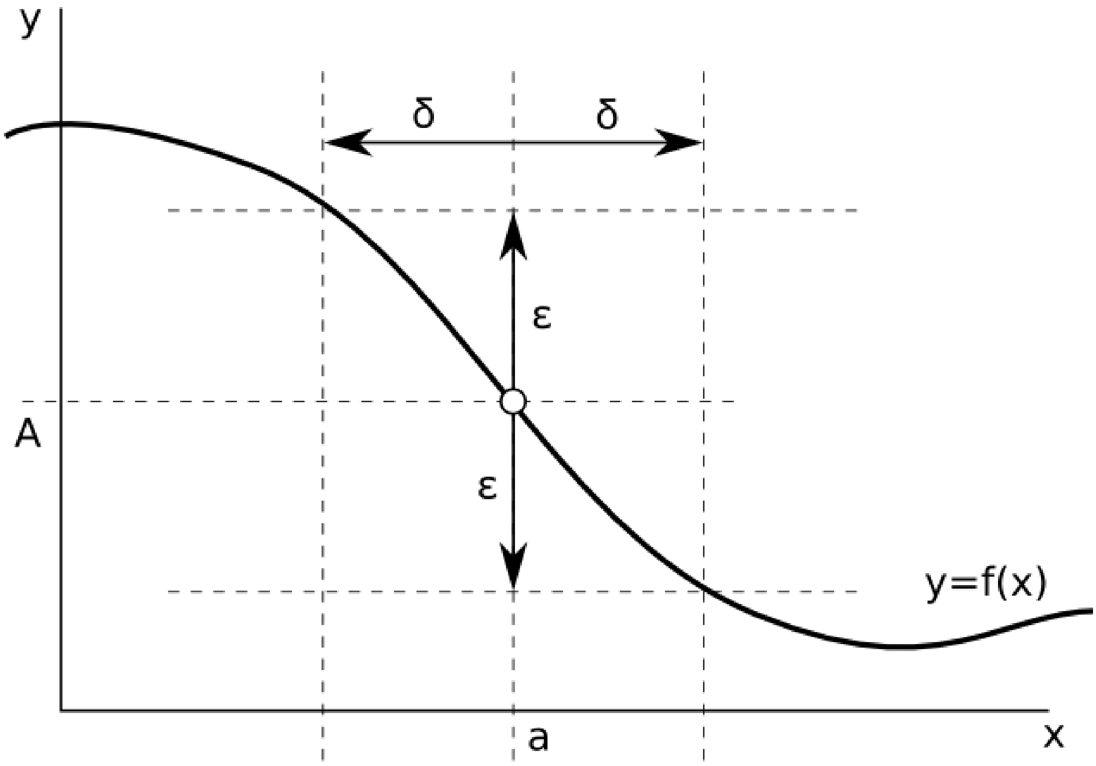
# Όρια Συναρτήσεων

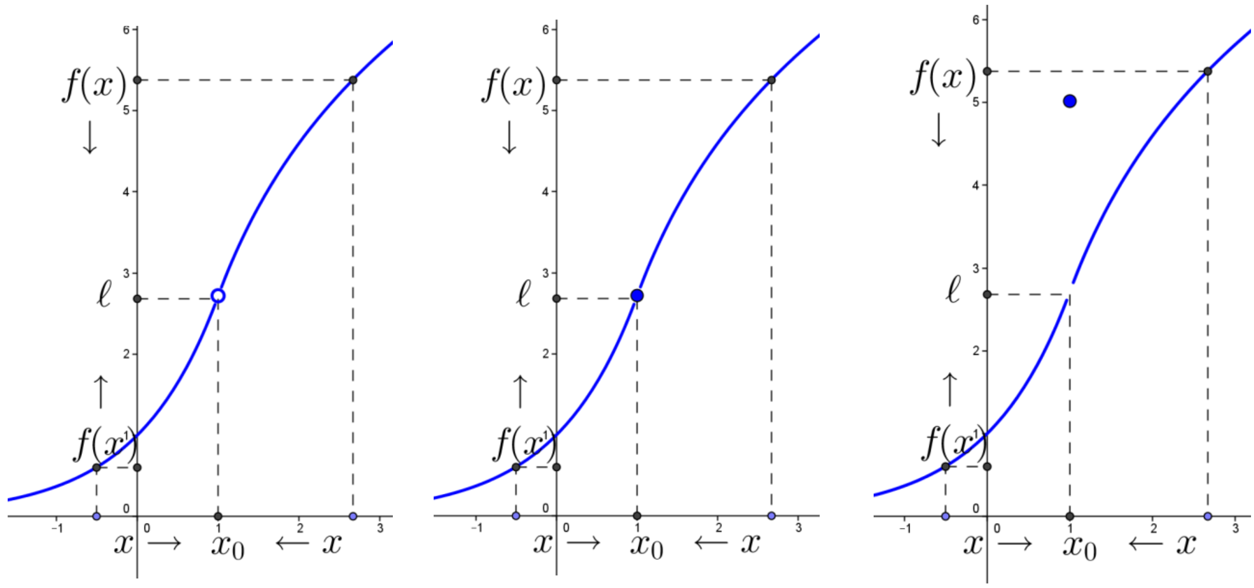


# ΜΕΡΟΣ 1
# Πεπερασμένο Όριο στο $x_0$

## Α. Ορισμός

**Όριο στο $x_0$**: Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης $f$ προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό $\ell$, καθώς το $x$ προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό $x_0$, τότε λέμε ότι:
"*το όριο της $f(x)$, όταν το $x$ τείνει στο $x_0$, είναι $\ell$*", ή πιο απλά, ότι "*το όριο της $f(x)$ στο $x_0$ είναι $\ell$*" και γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

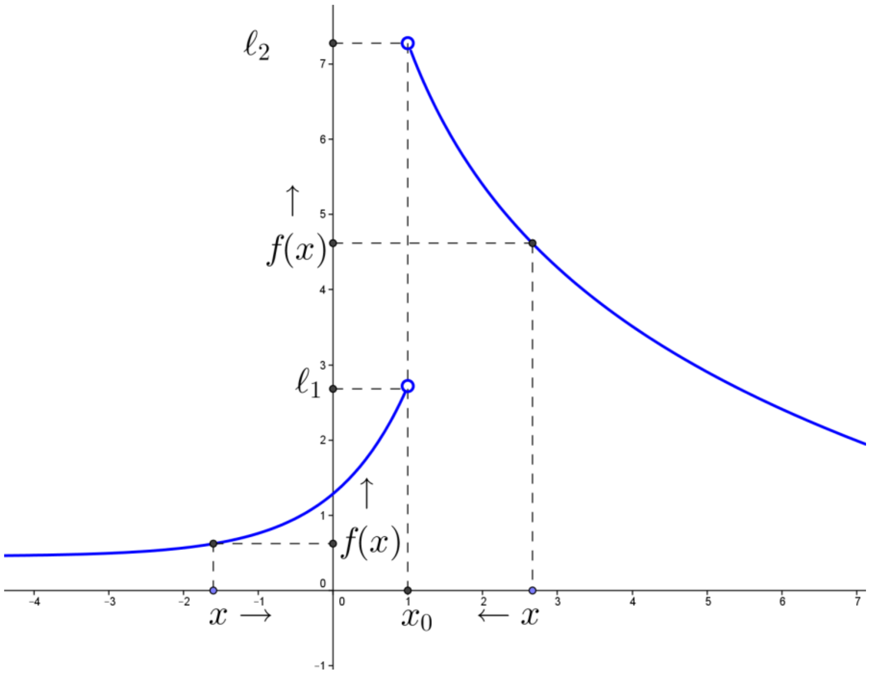
Για να αναζητήσουμε το όριο της $f(x)$ στο $x_0$, πρέπει η $f$ να ορίζεται όσο θέλουμε κοντά στο $x_0$, δηλαδή η $f$ να είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ ή $(a,x_0)$ ή $(x_0,b)$.
Το $x_0$ μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ή να μην ανήκει σε αυτό (σχήμα 1).
Η τιμή της $f$ στο $x_0$, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο $x_0$ ή διαφορετική από αυτό (σχήμα 1).




**Σχήμα 1**. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$. (α) Η $f$ δεν ορίζεται στο $x_0$. (β) Η $f$ ορίζεται στο $x_0$ και $f(x_0)=\ell$.
(γ) Η $f$ ορίζεται στο $x_0$, αλλά $f(x_0)\neq\ell$

**Πλευρικά Όρια στο $x_0$**: Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης $f$ προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό $\ell_1$, καθώς το $x$ προσεγγίζει τον αριθμό $x_0$ από μικρότερες τιμές, τότε λέμε ότι
"*το όριο της $f(x)$, όταν το $x$ τείνει στο $x_0$ από τα αριστερά, είναι $\ell_1$*", ή, πιο απλά, ότι "*το αριστερό όριο της $f(x)$ στο $x_0$ είναι $\ell_1$*" και γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell_1$.

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης $f$ προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό $\ell_1$, καθώς το $x$ προσεγγίζει τον αριθμό $x_0$ από μεγαλύτερες τιμές, τότε λέμε ότι
"*το όριο της* $f(x)$*, όταν το* $x$ *τείνει στο* $x_0$ *από τα δεξιά, είναι* $\ell_2$", ή, πιο απλά, ότι "*το δεξιό όριο της* $f(x)$ *στο* $x_0$ *είναι* $\ell_2$" και γράφουμε $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_2$.




**Σχέδιο 2**. Πλευρικά Όρια.

# Β. Βασικά Θεωρήματα

**Θεώρημα 1.**
Έστω μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a,x_0)\cup(x_0,b)$. Τότε, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

(α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)-\ell\big)=0$,

(β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$.

**Θεώρημα 2.**
Έστω μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a,x_0)\cup(x_0,b)$. Τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$.

**Θεώρημα 3.**
Έστω μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a,x_0)\cup(x_0,b)$. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο $x_0$. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο $x_0$.

**Θεώρημα 4.**
Αν οι συναρτήσεις $f$, $g$ είναι ορισμένες σε ένα σύνολο της μορφής $(a,x_0)\cup(x_0,b)$, έχουν όριο στο $x_0$ και ισχύει $f(x)<g(x)$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

**Θεώρημα 5. (Κριτήριο Παρεμβολής)**
Δίνονται οι συναρτήσεις $f$, $g$, $h$, οι οποίες είναι ορισμένες σε ένα σύνολο της μορφής $(a,x_0)\cup(x_0,b)$. Αν $h(x)\le f(x)\le g(x)$, για κάθε $x\in(a,x_0)\cup(x_0,b)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\ell$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

# Γ. Βασικές Ιδιότητες

**1.** όριο σταθερής συνάρτησης: $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$, για κάθε $c \in R$.

**2.** Όριο ταυτοτικής Συνάρτησης: $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

**3.** Όριο αθροίσματος: Αν υπάρχουν τα όρια των $f$, $g$ στο $x_0$, τότε ισχύει ότι $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$.

**4.** Όριο βαθμωτού γινομένου: Αν υπάρχει το όριο της $f$ στο $x_0$, τότε ισχύει ότι $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lambda\cdot f(x)\right) = \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, για κάθε $\lambda \in R$.

**5.** Όριο γινομένου: Αν υπάρχουν τα όρια των $f$, $g$ στο $x_0$, τότε ισχύει ότι $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$.

**6.** Όριο πηλίκου: Αν υπάρχουν τα όρια των $f$, $g$ στο $x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, τότε ισχύει ότι

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}}.$$

**7.** Όριο απόλυτης τιμής: Αν υπάρχει το όριο της $f$ στο $x_0$, τότε ισχύει ότι $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|}$,

**8.** Όριο ρίζας: Αν η $f$ είναι θετική κοντά στο $x_0$ και υπάρχει το όριο της $f$ στο $x_0$, τότε $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}}$, για κάθε φυσικό αριθμό $k$.

**Τριγωνομετρικά Όρια**

**1.** Ισχύει $|\text{ημ}(x)| \le |x|$ για κάθε $x \in R$.

**2.** $\lim\limits_{x\to x_0} \text{ημ}(x) = \text{ημ}(x_0)$

**3.** $\lim\limits_{x\to x_0} \text{συν}(x) = \text{συν}(x_0)$

**4.** $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{ημ}(x)}{x} = 1}$

**5.** $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{συν}(x)-1}{x} = 0}$

**Όριο Σύνθετης Συνάρτησης** $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$

- Θέτουμε $u = g(x)$
- Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το όριο $u_0 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- Τέλος, υπολογίζουμε το όριο $\ell = \lim\limits_{u\to u_0} f(u)$. Ισχύει δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{u\to u_0} f(u)$ (αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο $x_0$.

# Δ. Μεθοδολογία Ασκήσεων.

## 1. Υπολογισμός απλών ορίων

Στην περίπτωση απλών ή σύνθετων παραστάσεων, στις οποίες δεν υπάρχουν απόλυτες τιμές, αλλά ούτε και κάποιος παρονομαστής που να μηδενίζεται, απλώς αντικαθιστούμε το $x$ με την τιμή $x_0$ (την τιμή στην οποία τείνει το $x$) και υπολογίζουμε το όριο.

## 2. Όρια δύκλαδων συναρτήσεων ή συναρτήσεων με απόλυτες τιμές

Αντικαθιστούμε το $x$ με την τιμή $x_0$, όπως στην πρώτη περίπτωση. Αν οι παραστάσεις μέσα στα απόλυτα είναι θετικές ή αρνητικές υπολογίζουμε το όριο με αυτή την απλή αντικατάσταση. Στην περίπτωση που κάποια από τις παραστάσεις αυτές πάρει την τιμή 0 (και προκύπτει κάποιου είδους απροσδιοριστία), τότε βγάζουμε το απόλυτο χρησιμοποιώντας τη γνωστή (από την Α΄ Λυκείου) σχέση:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}.$$

Με αυτό τον τρόπο βγάζουμε την απόλυτη τιμή και οδηγούμαστε σε μια δύκλαδη συνάρτηση, της οποίας υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια.

## 3. Υπολογισμός ορίου ρητών παραστάσεων που εμφανίζουν την απροσδιόριστη μορφή 0/0.

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή (οι οποίοι έχουν ως ρίζα το $x_0$) και διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το $x$ με την τιμή $x_0$ και υπολογίζουμε το όριο.

## 4. Υπολογισμός ορίου ρητών παραστάσεων με ρίζες, οι οποίες εμφανίζουν την απροσδιόριστη μορφή 0/0.

Ακολουθούμε μια από τις παρακάτω μεθοδολογίες.

**Α)** Πολλαπλασιάζουμε με τις συζυγείς παραστάσεις των παραγόντων, οι οποίοι έχουν ρίζες, τον αριθμητή και παρονομαστή. Κάνουμε τις πράξεις (διαφορά τετραγώνων, κ.λ.π.) και διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες που προκύπτουν. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το $x$ με την τιμή $x_0$ και υπολογίζουμε το όριο.

**Β)** Αν εμφανίζονται ριζικά μεγαλύτερης τάξης (π.χ. $\sqrt[3]{x-2}$), τότε αντί για πολλαπλασιασμό με τη συζυγή παράσταση, πολλαπλασιάζουμε με τον κατάλληλο παράγοντα ώστε να σχηματιστεί η ταυτότητα

$$x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right).$$

Για παράδειγμα, αν εμφανίζεται παράγοντας της μορφής $1-\sqrt[3]{x-1}$, πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση $1+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Έτσι παίρνουμε

$$\left(1-\sqrt[3]{x-1}\right)\left(1+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}\right) = 1-(x-1) = -x\,.$$

**Γ)** Αν εμφανίζονται ριζικά με ίδιο υπόριζο (π.χ. $\sqrt{x+1}$, $\sqrt[3]{x+1}$), τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε με $u$ το ριζικό με δείκτη τον ΕΚΠ των δεικτών που εμφανίζονται στις ρίζες. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα $u=\sqrt[6]{x+1}$, οπότε $\sqrt{x+1}=u^3$ και $\sqrt[3]{u+1}=u^2$. Στη συνέχεια, μπορούμε να εφαρμόσουμε τις ιδιότητες ορίων σύνθετων συναρτήσεων.

**Δ)** Στην περίπτωση όπου εμφανίζονται διαφορετικές ρίζες (π.χ. . $\sqrt{x+1}$, $\sqrt[3]{x+2}$), τότε μπορούμε να σπάσουμε το κλάσμα στα δύο, βάζοντας στο ένα τη μία ρίζα και στο άλλο την άλλη, προσέχοντας όμως να έχουμε απροσδιοριστία και στα δύο κλάσματα. Δουλεύουμε το κάθε ένα ξεχωριστά.

Π.χ. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}+\sqrt[3]{x-1}-4}{x-2}$, τότε παίρνουμε $\dfrac{\sqrt{x+7}+\sqrt[3]{x-1}-4}{x-2}=\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}+\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-1}{x-2}$ και υπολογίζουμε τα δύο όρια ξεχωριστά.

## 5. Υπολογισμός ορίου τριγωνομετρικών παραστάσεων, οι οποίες εμφανίζουν την απροσδιόριστη μορφή 0/0.

Ακολουθούμε μια από τις παρακάτω μεθοδολογίες:

**Α)** Γενικά προσπαθούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις σχέσεις των τριγωνομετρικών ορίων. Για το σκοπό αυτό μπορεί να χρειαστεί να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμητή ή τον παρονομαστή.

Π.χ. αν μας ζητείται το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\text{ημ}(a\cdot x)}{x}$, τότε έχουμε $\dfrac{\text{ημ}(a\cdot x)}{x}=\dfrac{a\cdot\text{ημ}(a\cdot x)}{a\cdot x}$ και ακολουθούμε τους κανόνες του ορίου σύνθετης συνάρτησης.

**Β)** Αν έχουμε παράσταση με ρίζα, τότε ακολουθούμε τη διαδικασία που περιγράφεται στην κατηγορία 4 και στη συνέχεια προσπαθούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις των τριγωνομετρικών ορίων.
Δεν ξεχνάμε τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα: $\text{ημ}^2(x)+\text{συν}^2(x)=1$.

**Γ)** Αν εμφανίζεται σε ένα κλάσμα η παράσταση $1-\sigma\upsilon\nu(x)$, ή η παράσταση $1+\sigma\upsilon\nu(x)$, τότε μια καλή ιδέα είναι να πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση.

**Δ)** Πολλά όρια που περιέχουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις λύνονται με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής. Γι αυτό το λόγο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ανισώτητες

1. $-1\le \text{ημ}x\le 1$, $-1\le \text{συν}x\le 1$
2. $-x\le \text{ημ}x\le x$

## 6. Υπολογισμός ορίου συνάρτησης, αν δίνονται συγκεκριμένες ανισότητες.

Σε τέτοιες ασκήσεις χρησιμοποιούμε το κριτήριο παρεμβολής. Βρίσκουμε τα όρια των παραστάσεων που φράζουν άνω και κάτω τη δοσμένη συνάρτηση. Αν αυτά τα όρια ταυτίζονται, τότε το κοινό όριο είναι και όριο τη δοσμένης συνάρτησης.

## 7. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να υπολογίσουμε το όριο μιας συνάρτησης *f(x)*, όταν δίνεται το όριο μιας παράστασης Π(*f(x)*) (η οποία περιέχει την *f(x)*).

Θέτουμε $g(x)=\Pi(f(x))$ και λύνουμε ως προς $f(x)$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τους γνωστούς κανόνες των ορίων.

**Σημείωση 1**. Αν $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$ τότε ισχύει ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$. Η απόδειξη μπορεί να γίνει με κριτήριο παρεμβολής, χρησιμοποιώντας την ανίσωση $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$. Αν $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \ell$, $\ell > 0$, τότε είτε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, είτε $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\ell$, είτε δεν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

**Σημείωση 2**. Όπως θα δούμε παρακάτω, πολλά από τα όρια που εμφανίζουν απροσδιοριστία της μορφής 0/0 μπορούν να υπολογιστούν ευκολότερα με τη βοήθεια του **κανόνα L' Hospital**:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

# Ασκήσεις

**1.** Να υπολογιστούν τα όρια

Α) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+4x-4}{x^3+8}$, Β) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-5x+6}$, Γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$

**2.** Να υπολογιστούν τα όρια (αν υπάρχουν).

Α) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{|x-5|+x^2-4x-5}{x^2-25}$, Β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{|x|-1}$, Γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1+|x-1|}{x^2-1}$, Δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|+|x-2|}{x}$

**3.** Να υπολογιστούν τα όρια

Α) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49}$, Β) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$ Γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x}-1}$, Δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

**4.** Να υπολογιστούν τα όρια

Α) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^2-100}{x\cdot\sqrt{10}-10\cdot\sqrt{x}}$, **Β)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}$

**5.** Να υπολογιστούν τα όρια

Α) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{2x+2}-\sqrt[3]{x+5}}{x-3}$, **Β)** $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{1+x}-3}{2-\sqrt[3]{x}}$, **Γ)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2x+4}+\sqrt{3x-2}-4}{x-2}$, **Δ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$

**6.** Να υπολογιστούν τα όρια

Α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 4x}{3x}$, Β) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{x}}$, Γ) $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\dfrac{\eta\mu(3x-2)}{9x^2-4}$

**7.** Να υπολογιστούν τα όρια

Α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{1-\sqrt{1+x}}$, Β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 7x-\eta\mu 2x}{3x}$, Γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\eta\mu x}{\varepsilon\varphi x-2x}$, Δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 2x}$

Ε) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left[(\pi-2x)\cdot\varepsilon\varphi x\right]$

**8.** Αν γνωρίζετε ότι

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x^2-3x+2}=1,$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και να το υπολογίσετε.

**9.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} -2\eta\mu(x), & x\le -\dfrac{\pi}{2} \\ \alpha\eta\mu(x)+\beta, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu(x), & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}.$$

Αν γνωρίζετε ότι υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)$, να υπολογίσετε τις παραμέτρους α, β.

**10.** Αν για κάθε $x\in R$, ισχύει $\eta\mu(3x)-x|x|\le f(x)\le 3x+x|x|$, να βρεθούν

Α) το $\lim_{x\to 0} f(x)$ και

Β) το $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$

**11.** Αν για τις πραγματικές συναρτήσεις $f, g$, ισχύει ότι $\lim_{x\to x_0}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)=0$, να υπολογίσετε τα όρια:

**Α)** $\lim_{x\to x_0} f(x)$

**Β)** $\lim_{x\to x_0} g(x)$

**Γ)** Αν $f^2(x)+g^2(x)\le 2\eta\mu(x)f(x)$, για κάθε $x\in R$, να δειχθεί ότι $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} g(x)=0$.

**12.** Δίνεται η συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού το $A$, έτσι ώστε η συνάρτηση να ορίζεται κοντά στο 1. Αν γνωρίζετε το όριο

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\ell,$$

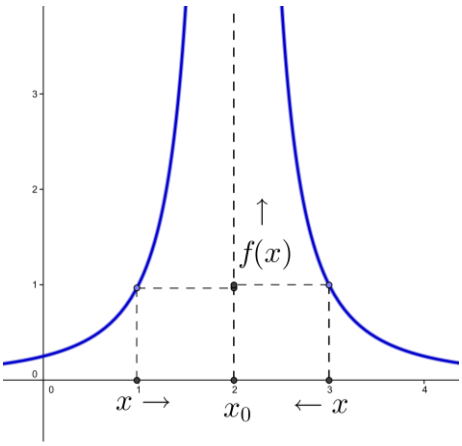
Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-xf(1)}{x\left(x^2-1\right)}=\frac{\ell-f(1)}{2}.$$

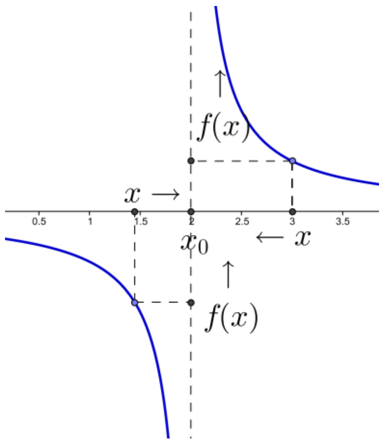
# ΜΕΡΟΣ 2
# Μη πεπερασμένο Όριο στο $x_0$ - Όριο στο Άπειρο

## Α. Μη πεπερασμένο όριο

Πολύ συχνά, καθώς το $x$ κινείται προς το $x_0$ παρατηρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης μεγαλώνουν ή μικραίνουν απεριόριστα (σχήμα 1). Σε αυτή την περίπτωση, λέμε ότι η συνάρτηση έχει στο $x_0$ όριο το $+\infty$ ή το $-\infty$ αντίστοιχα.




(α)




(β)

**Σχήμα 1**. (α) Η συνάρτηση έχει στο $x_0$ όριο το $+\infty$. (β) Δεν ορίζεται το όριο της συνάρτησης στο $x_0$.

### Βασικές ιδιότητες

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο $x_0$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο $x_0$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-f(x)\right)=-\infty$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-f(x)\right)=+\infty$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο $x_0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο $x_0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=+\infty$.

Σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε

$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu}}=+\infty}$, $\boxed{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty}$, $\boxed{\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty}$.

# B. Όριο στο άπειρο

Καθώς το $x$ αυξάνεται (ή μειώνεται) απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, μπορεί να συμβούν τα εξής:

- Το $f(x)$ προσεγγίζει όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό $\ell$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η $f$ έχει στο $+\infty$ όριο το $\ell$ και γράφουμε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.
- Το $f(x)$ μειώνεται απεριόριστα. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η $f$ έχει στο $+\infty$ όριο το $-\infty$ και γράφουμε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
- Το $f(x)$ αυξάνεται απεριόριστα. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η $f$ έχει στο $+\infty$ όριο το $+\infty$ και γράφουμε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

## Βασικά όρια

- $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^{\nu}=+\infty}$ και $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\nu}}=0}$
- $\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^{2\nu}=+\infty}$, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^{2\nu+1}=-\infty}$ και $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{\nu}}=0}$
- $\boxed{\lim_{x\to+\infty} a^{x}=+\infty}$, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} a^{x}=0}$, για $a>1$.
- $\boxed{\lim_{x\to+\infty} a^{x}=0}$, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} a^{x}=+\infty}$, για $0<a<1$.
- $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \log_a x=+\infty}$, $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \log_a x=-\infty}$, για $a>1$.
- $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \log_a x=-\infty}$, $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \log_a x=+\infty}$, για $0<a<1$.

- **Όριο Πολυωνυμικής συνάρτησης** $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$.

  $\boxed{\lim_{x\to+\infty} P(x)=\lim_{x\to+\infty}(a_nx^n)}$, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} P(x)=\lim_{x\to-\infty}(a_nx^n)}$

- **Όριο Ρητής συνάρτησης** $f(x)=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$

  $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right)}$ $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right)}$

**Πράξεις με το $\infty$.**

Οι πράξεις με άπειρα όρια γίνονται με βάση την κοινή λογική.

| | |
|---|---|
| $(+\infty)\cdot(+\infty)$ | $=+\infty$ |
| $(+\infty)\cdot(-\infty)$ | $=-\infty$ |
| $(-\infty)\cdot(-\infty)$ | $=+\infty$ |
| $\lambda\cdot(+\infty)$ | $=+\infty$ (αν $\lambda>0$ ) |
| $\lambda\cdot(+\infty)$ | $=-\infty$ (αν $\lambda<0$) |
| $(+\infty)+(+\infty)$ | $=+\infty$ |
| $(-\infty)+(-\infty)$ | $=-\infty$ |
| $\lambda+(+\infty)$ | $=+\infty$ |
| $\lambda+(-\infty)$ | $=-\infty$ |
| $\dfrac{1}{\pm\infty}$ | $=0$ |
| $\dfrac{1}{0^+}$ | $=+\infty$ |
| $\dfrac{1}{0^-}$ | $=-\infty$ |

**ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ**

$$\frac{0}{0},\ 0\cdot(\pm\infty),\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ (+\infty)-(+\infty),\ (-\infty)-(-\infty),\ (+\infty)+(-\infty)$$

# Γ. Μεθοδολογία Ασκήσεων.

## 1. Υπολογισμός απλών ορίων

Στην περίπτωση όπου το όριο της δοσμένης παράσταση μπορεί να υπολογισθεί άμεσα χρησιμοποιώντας τους κανόνες που αναφέρθηκαν, το έργο μας είναι εύκολο. Πολλές φορές οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων μας προσφέρουν εύκολα το όριο που αναζητούμε. Αν έχουμε απόλυτα τότε διακρίνουμε περιπτώσεις και τα αφαιρούμε σύμφωνα με τον κανόνα

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}.$$

Παραδείγματα

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^6} = +\infty$, το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^5}$ δεν υπάρχει, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^6} = 0$, κ.λ.π.

## 2. Όριο ρητών συναρτήσεων στο $x_0$ που καταλήγουν στην μορφή θ/0, θ>0

Στην περίπτωση αυτή εξετάζουμε το πρόσημο του παρονομαστή κοντά στο $x_0$. Αν ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε x γύρω από μια περιοχή του $x_0$, τότε το όριο είναι $+\infty$, ενώ αν είναι αρνητικός το όριο είναι το $-\infty$. Όμως, στην περίπτωση που ο παρονομαστής δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο γύρω από το $x_0$, τότε το όριο δεν υπάρχει (παρότι υπάρχουν τα πλευρικά όρια).

Παραδείγματα:

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} \left( = \dfrac{1}{0^+} \right) = +\infty$, το όριο $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-1}{(x-1)^3}$ δεν υπάρχει αφού $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-1}{(x-1)^3} \left( = \dfrac{1}{0^+} \right) = +\infty$, ενώ $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x-1}{(x-1)^3} \left( = \dfrac{1}{0^-} \right) = -\infty$.

Αν η παράσταση είναι άθροισμα ρητών με παρονομαστές που μηδενίζονται, τότε κάνουμε ομώνυμα για να έχουμε μια μόνο ρητή παράσταση.

## 3. Όριο ρητών συναρτήσεων στο άπειρο

Στην περίπτωση αυτή ακολουθούμε τους κανόνες των ορίων ρητής συνάρτησης, δηλαδή:

**Αν** $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$

Τότε $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left( \dfrac{a_n}{b_m} x^{n-m} \right)}$ και $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left( \dfrac{a_n}{b_m} x^{n-m} \right)}$

Αν η παράσταση είναι άθροισμα ρητών, τότε κάνουμε ομώνυμα για να έχουμε μια μόνο ρητή παράσταση.

## 4. Όριο στο άπειρο διαφοράς ριζών που καταλήγουν στην απροσδιόριστη μορφή ∝ - ∝

Πολλαπλασιάζουμε με τη συζυγή παράσταση αριθμητή και παρονομαστή, κάνουμε τη διαφορά τετραγώνων και εκτελούμε τις πράξεις μέχρι να εξαλειφθεί η απροσδιοριστία.

## 5. Όριο στο άπειρο ρητής συνάρτησης με εκθετικές

Επιλέγουμε τη μεγαλύτερη βάση, έστω α, και διαιρούμε όλους τους όρους στον αριθμητή και στον παρονομαστή με το $a^x$.

Παράδειγμα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+10^x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{e^x}{10^x}+\dfrac{10^x}{10^x}}{\dfrac{e^x}{10^x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\dfrac{e}{10}\right)^x+1}{\left(\dfrac{e}{10}\right)^x}=\left(\dfrac{0^+ +1}{0^+}\right)=1$.

## 6. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να υπολογίσουμε το όριο μιας συνάρτησης *f(x)*, όταν δίνεται το όριο μιας παράστασης Π(*f(x)*) (η οποία περιέχει την *f(x)*).

Θέτουμε $g(x)=\Pi(f(x))$ και λύνουμε ως προς $f(x)$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τους γνωστούς κανόνες των ορίων.

## 7. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να υπολογίσουμε την τιμή μιας παραμέτρου έτσι ώστε να υπάρχει το όριο (ή να είναι ίσο με μια συγκεκριμένη τιμή).

Αν έχουμε ένα πηλίκο της μορφής $\dfrac{f(\lambda)}{0}$, τότε για να υπάρχει το όριο θα πρέπει $f(\lambda)=0$. Υπολογίζουμε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η συνθήκη και ελέγχουμε αν όντως υπάρχει το όριο.
Αν έχουμε απροσδιόριστη μορφή $+\infty-\lambda\cdot(+\infty)$, τότε ακολουθούμε τη μεθοδολογία της κατηγορίας 4 και εξετάζουμε για ποια τιμή του λ υπάρχει το όριο.
Όμοια δουλεύουμε σε όλες τις άλλες περιπτώσεις.

# Ασκήσεις

**1.** Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}+\varepsilon\varphi^2 x}{\eta\mu^2 x+\varepsilon\varphi^2 x}$, β) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\eta\mu^2 x}{x-\pi}$, γ) $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu\big(\eta\mu(\eta\mu 2x)\big)$

**2.** Να υπολογιστούν τα όρια:

α). $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+2^x+3^3}{1+5^x+e^x}$, β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+3^{x+1}}{2^{x+1}+3^x}$, γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^{x+1}-3^x}{2^x+3^{x+1}}$, δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha^{x+1}+2^{x+2}}{\alpha^{x+2}+2^{x+1}}$

**3.** Αν $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^3+x-2}(\eta\mu x-2)$ και $g(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu 4x}{\sqrt{x^2+\eta\mu^2 x}}$, να δειχτεί, ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

**4.** Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varepsilon\varphi x}=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2 g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=2$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\cdot g(x)$.

**5.** Να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια

α). $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$, β) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$, γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$

**6.** Να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια

α). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{(x-2)^2}$, β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-4}{x^2+2x^3}$, γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{(x-2)^2}$

**7.** Να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια

α). $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{3x-5}-2}$, β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

**8.** Να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια

α). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{2x}-2}$, β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-4x+4}$

**9.** Να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια:

α). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$, β) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-2}{\sqrt[3]{x+9}-2}$ γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}}$

**10.** Να βρεθεί ο $\alpha\in R$ έτσι ώστε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-\alpha x+2}{x-2}$ να είναι πραγματικός αριθμός.

**11.** Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

α). $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^5-2x+2)$, β) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^4-3x+1)$ γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+2x+1)$

δ). $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-x^2+1}{x^3+2}$, ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^5+2x+3}$, στ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4+x^2-2x}{x^5+1}$

ζ). $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+2x+3}{3x^3+1}$, η) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x}{x^3+2x^2+1}$, θ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-7x^3+2x-6}{x^2-1}$

**12.** Να βρεθούν τα όρια:

α). $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+2}$, β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3x+2}$

**13.** Να βρεθούν τα όρια:

α). $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-2x\right)$, β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

**14.** Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$, β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+1}-x}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

**15.** Να βρεθούν τα όρια:

α). $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu 2x}{x+1}$, β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\eta\mu 3x-\sigma\upsilon\nu^2 2x}{x^2-1}$, γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\eta\mu x$