Γραμμικα Συστηματα

Στο παρόν φυλλάδιο μελετάμε ένα από τα πιο κοινά προβλήματα που εμφανίζονται στα μαθηματικά, τα γραμμικά συστήματα. Η επίλυση γραμμικών συστημάτων με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους (συστήματα 2×2 όπως λέμε) μελετάται από το Γυμνάσιο, ενώ η γενίκευση της επίλυσης με τη μέθοδο του Gauss καθώς επίσης και η μέθοδος των οριζουσών δίνονται στη Β΄ Λυκείου, αν και η μελέτη περιορίζεται σε συστήματα 3 επί 3. Εδώ μελετάμε το γενικό πρόβλημα της επίλυσης ενός συστήματος με m εξισώσεις και n αγνώστους. Σημειώνουμε ότι στα παρακάτω αναφερόμαστε σε ένα γενικό σώμα $\mathbb{F}$, το οποίο μπορεί να είναι είτε το $\mathbb{R}$ (οι πραγματικοί αριθμοί), είτε το $\mathbb{C}$ (οι μιγαδικοί αριθμοί). Επιπλέον, περιοριζόμαστε στην μελέτη της μεθόδου απαλοιφής του Gauss, χωρίς να δίνουμε άλλους τρόπους επίλυσης που χρησιμοποιούν επαυξημένους πίνακες και ορίζουσες.

1 Βασικες Εννοιες

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας μερικούς βασικούς ορισμούς.

Ορισμός 1. *Μια εξίσωση λέγεται **Γραμμική** υπεράνω του $\mathbb{F}$ αν είναι της μορφής*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

*όπου οι **συντελεστές** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ και ο **σταθερός όρος** b ανήκουν στο $\mathbb{F}$ και είναι γνωστοί, ενώ οι $x_1, x_2, \ldots x_n$ είναι άγνωστοι (και ανήκουν επίσης στο $\mathbb{F}$).*

Ορισμός 2. *Έστω m, n δύο θετικοί ακέραιοι. Ένα **Γραμμικό Σύστημα** m **επί** n υπεράνω του $\mathbb{F}$ είναι ένα σύστημα (γραμμικών) εξισώσεων υπεράνω του $\mathbb{F}$ της μορφής:*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1, \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2, \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m. \end{array}$$

*Οι αριθμοί $a_{i,j} \in \mathbb{F}$ (για $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$) ονομάζονται **συντελεστές** του συστήματος και οι αριθμοί $b_1, b_2, \ldots, b_m$ λέγονται **σταθεροί όροι** του συστήματος. Ο αριθμός m είναι το πλήθος των εξισώσεων, ενώ ο αριθμός n είναι το πλήθος των αγνώστων. Ένα διάνυσμα της μορφής*

$\chi = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n)$ τέτοιο ώστε οι συντελεστές του να ικανοποιούν όλες τις εξισώσεις του συστήματος, ονομάζεται ***λύση*** *του συστήματος. Ένα γραμμικό σύστημα λέγεται* ***συμβιβαστό*** *αν έχει τουλάχιστον μια λύση, διαφορετικά ονομάζεται* ***αδύνατο*** *στο $\mathbb{F}$.*

Ορισμός 3. *Ένα γραμμικό σύστημα m επί n υπεράνω του $\mathbb{F}$ θα λέγεται* ***ομογενές*** *όταν είναι της μορφής*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = & 0, \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,n}x_n & = & 0, \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{m,n}x_n & = & 0. \end{array}$$

Προφανώς, κάθε ομογενές σύστημα είναι συμβιβαστό αφού η $\mathbf{x} = (0, 0, \ldots, 0)$ αποτελεί μια λύση του συστήματος. Η συγκεκριμένη λύση ονομάζεται μηδενική ή τετριμμένη λύση.

Ορισμός 4. *Δύο γραμμικά συστήματα ονομάζονται* ***ισοδύναμα*** *αν έχουν τις ίδιες λύσεις.*

Ορισμός 5: Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί

Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα m επί n υπεράνω του $\mathbb{F}$ και ορίζουμε ως r_1, r_2, r_m τις εξισώσεις του συστήματος. Κάθε μια από τις παρακάτω διαδικασίες ονομάζεται ένας ***στοιχειώδης μετασχηματισμός*** *του συστήματος:*

- *$r_i \leftarrow a \cdot r_i$, όπου $a \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$ (Πολλαπλασιάζουμε μια εξίσωση με ένα μη μηδενικό αριθμό).*
- *$r_i \leftrightarrow r_j$ (Εναλλάσουμε τις θέσεις δύο εξισώσεων).*
- *$r_i \leftarrow r_i + a \cdot r_j$, όπου $a \in \mathbb{F}$ (Προσθέτουμε σε μια εξίσωση το πολλαπλάσιο μιας άλλης εξίσωσης).*

Ορισμός 6. *Ένα γραμμικό σύστημα με n εξισώσεις και n αγνώστους ονομάζεται* ***τετραγωνικό***.

Ορισμός 7. *Ένα γραμμικό σύστημα m επί n υπεράνω του $\mathbb{F}$ ονομάζεται* ***άνω τριγωνικό*** *όταν $a_{i,j} = 0$, για κάθε $i > j$.*

Παρατήρηση 1. *Ένα τριγωνικό γραμμικό σύστημα n επί n έχει μοναδική λύση, αν το στοιχείο $a_{n,n}$ είναι μη μηδενικό.*

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα: Θεωρείστε το 3 επί 3 σύστημα

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 2y & - & z & = & 5, \\ & & y & + & z & = & 2, \\ & & & & 2z & = & 2. \end{array}$$

Η τελευταία εξίσωση έχει μόνο έναν άγνωστο, επομένως εύκολα βρίσκουμε ότι $z = 1$. Αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση έχουμε $y + 1 = 2$, άρα $y = 1$. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση και έχουμε $2x + 2 \cdot 1 - 1 = 5$, επομένως $x = 2$.

Πρόταση 1. *Κάθε γραμμικό σύστημα υπεράνω του $\mathbb{F}$ είτε θα είναι αδύνατο (στο σώμα $\mathbb{F}$), είτε θα έχει μοναδική λύση, είτε θα έχει άπειρες λύσεις.*

Πρόταση 2. *Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα (Σ) με m εξισώσεις και n αγνώστους υπεράνω του $\mathbb{F}$. Κάθε άλλο γραμμικό σύστημα που προκύπτει από την εφαρμογή μιας πεπερασμένης ακολουθίας στοιχειωδών μετασχηματισμών στο (Σ), είναι ισοδύναμο με το (Σ).*

2 Μεθοδος Απαλοιφης του Gauss

Μια από τις πιο γνωστές και πιο αποτελεσματικές μεθόδους για την επίλυση γραμμικών συστημάτων είναι η μέθοδος απαλοιφής του Gauss. Αποτελεί γενίκευση της μεθόδου των αντιθέτων συντελεστών που διδάσκεται στο Γυμνάσιο (δείτε το παράδειγμα 4.1). Η γενική της ιδέα είναι να μετατρέψουμε (με τη βοήθεια στοιχειωδών μετασχηματισμών) ένα σύστημα σε ένα άλλο (προφανώς ισοδύναμο) το οποίο θα έχει τριγωνική μορφή και άρα μπορεί να λυθεί. Η μέθοδος αποτελείται από τα παρακάτω βήματα:

1. Εντοπίζουμε μια εξίσωση που ο συντελεστής του αγνώστου x_1 είναι μη μηδενικός και την μεταφέρουμε στη θέση της πρώτης εξίσωσης (r_1).

2. Διαιρούμε την εξίσωση αυτή με τον συντελεστή του αγνώστου x_1. Έτσι, στη νέα εξίσωση που προκύπτει ο άγνωστος x_1 έχει συντελεστή ίσο με 1.

3. Σε κάθε άλλη εξίσωση (κάτω από την πρώτη) εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $r_i \leftarrow r_i - a_{i,1} \cdot r_1$. Έτσι, μετατρέπουμε σε 0 τους συντελεστές του αγνώστου x_1 σε όλες τις εξισώσεις από την 2η και κάτω.

4. Στη συνέχεια, αγνοούμε την πρώτη εξίσωση και επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για τον άγνωστο x_2. Ακολούθως, αγνοούμε την δεύτερη εξίσωση και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για τον x_3 κ.ο.κ. Η διαδικασία τερματίζεται όταν φτάσουμε στον άγνωστο x_n.

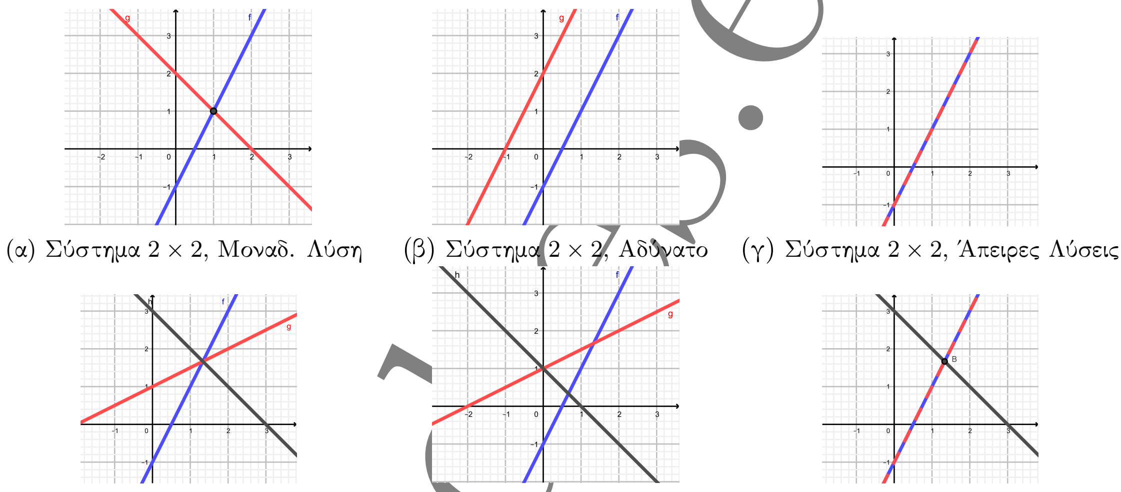
3 Γεωμετρικη Ερμηνεια

3.1 Συστήματα n επί 2

Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό σύστημα με n εξισώσεις και 2 αγνώστους. Όπως ξέρουμε από το Γυμνάσιο, κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = c$ παριστάνει ευθεία στο επίπεδο. Επομένως, η επίλυση ενός τέτοιου συστήματος είναι ισοδύναμη με την εύρεση ενός κοινού σημείου από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες. Αν έχουμε $n = 2$ ακριβώς εξισώσεις, τότε οι αντίστοιχες ευθείες μπορεί να είναι είτε (α) παράλληλες (οπότε το σύστημα είναι αδύνατο), είτε (β) να έχουν ένα κοινό σημείο τομής (οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση), είτε (γ) να ταυτίζονται (οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις). Αν έχουμε περισσότερες από 3 ευθείες ($n \geq 3$) τότε το σύστημα θα είναι συμβιβαστό μόνο αν (α) οι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο ή (β) αν δύο τουλάχιστον από τις ευθείες ταυτίζονται. Στο σχήμα 1 δίνονται διάφορα παραδείγματα τέτοιων συστημάτων.

3.2 Συστήματα n επί 3

Ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση, κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by + cz = d$ γνωρίζουμε ότι εκφράζει ένα επίπεδο στον χώρο $\mathbb{R}^3$. Επομένως, η επίλυση του συστήματος ισοδυναμεί με την εύρεση των κοινών σημείων όλων των επιπέδων. Στην περίπτωση που έχουμε δύο ακριβώς εξισώσεις ($n = 2$), τα αντίστοιχα επίπεδα μπορεί να είναι είτε (α) παράλληλα (οπότε το σύστημα είναι αδύνατο), είτε (β) να ταυτίζονται (οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με δύο ελεύθερους αγνώστους), ή



(α) Σύστημα 2×2, Μοναδ. Λύση (β) Σύστημα 2×2, Αδύνατο (γ) Σύστημα 2×2, Άπειρες Λύσεις

(δ) Σύστημα 3×2, Μοναδ. Λύση (ε) Σύστημα 3×2, Αδύνατο (στ) Σύστημα 3×2, Μοναδ. Λύση

Σχήμα 1: Διάφορες περιπτώσεις συστημάτων με δύο αγνώστους.

(γ) να τέμνονται οπότε οι κοινές τους λύσεις θα βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία (δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με έναν ελεύθερο άγνωστο). Στην περίπτωση που έχουμε 3 εξισώσεις (δηλαδή 3 επίπεδα) υπάρχει και η περίπτωση της μοναδικής λύσης, οπότε τα τρία αυτά επίπεδα τέμνονται σε ένα σημείο. Αυτό συμβαίνει αν κανένα ζεύγος επιπέδων δεν είναι παράλληλα.

4 Παραδειγματα

Παράδειγμα 4.1. *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{array}{rrcrcr} r_1: & 3x & - & y & = & -2, \\ r_2: & 2x & - & 2y & = & -8. \end{array}$$

Λύση: Θα λύσουμε το σύστημα χρησιμοποιώντας την μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών. Επιλέγουμε την διαγραφή της μεταβλητής x, οπότε (α) ξαναγράφουμε τις δύο εξισώσεις και (β) τοποθετούμε αριστερά κάθε εξίσωσης τον συντελεστή του x της άλλης εξίσωσης και (γ) σε έναν από τους συντελεστές βάζουμε το αντίθετο πρόσημο από αυτό που αρχικά έχει:

$$\begin{array}{rrcrcr} 2 & 3x & - & y & = & -2, \\ -3 & 2x & - & 2y & = & -8. \end{array}$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε κάθε εξίσωση με τον αντίστοιχο συντελεστή και προσθέτουμε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{rcrcr} 6x & - & 2y & = & -4, \\ -6x & + & 6y & = & 24, \\ \hline & & 4y & = & 20. \end{array}$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι $y = 5$. Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση την τιμή $y = 1$ παίρνουμε την εξίσωση $3x - 1 = -2$, από όπου προκύπτει ότι $x = 1$. Οπότε η λύση του συστήματος είναι $(x, y) = (1, 5)$. □

Παράδειγμα 4.2. *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} r_1: & x & - & y & + & z & - & 2w & = & -2, \\ r_2: & 2x & - & y & & & + & w & = & 8, \\ r_3: & x & + & y & - & z & & & = & 0, \\ r_4: & 3x & + & 2y & + & 2z & - & w & = & 3. \end{array}$$

Λύση: Θα λύσουμε το σύστημα με την μέθοδο απαλοιφής του Gauss. Η πρώτη μεταβλητή είναι η x και παρατηρούμε ότι ο συντελεστής είναι 1. Θα εφαρμόσουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς έτσι ώστε οι συντελεστές της μεταβλητής x να μηδενιστούν σε όλες τις άλλες εξισώσεις. Ξεκινάμε με τον μετασχηματισμό $r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1$, ο οποίος μας δίνει το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & 2w & = & -2, \\ & + & y & - & 2z & + & 5w & = & 12, \\ x & + & y & - & z & & & = & 0, \\ 3x & + & 2y & + & 2z & - & w & = & 3. \end{array}$$

Ομοίως, οι μετασχηματισμοί $r_3 \leftarrow r_3 - r_1$ και $r_4 \leftarrow r_4 - 3r_1$ θα δώσουν τελικά το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & 2w & = & -2, \\ & + & y & - & 2z & + & 5w & = & 12, \\ & + & 2y & - & 2z & + & 2w & = & 2, \\ & + & 5y & - & z & + & 5w & = & 9. \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε ολοκληρώσει την διαδικασία για την μεταβλητή x, επομένως αγνοούμε την πρώτη εξίσωση και επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για το σύστημα

$$\begin{array}{rrcrcrcr} r_2: & y & - & 2z & + & 5w & = & 12, \\ r_3: & 2y & - & 2z & + & 2w & = & 2, \\ r_4: & 5y & - & z & + & 5w & = & 9. \end{array}$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι στην πρώτη εξίσωση η μεταβλητή y έχει συντελεστή 1, επομένως δεν χρειάζεται να κάνουμε κάποια διαίρεση. Εφαρμόζουμε τους μετασχηματισμούς $r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1$ και $r_4 \leftarrow r_4 - 5r_1$ οπότε παίρνουμε το σύστημα:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} r_2: & y & - & 2z & + & 5w & = & 12, \\ r_3: & & + & 2z & - & 8w & = & -22, \\ r_4: & & + & 9z & - & 20w & = & -51. \end{array}$$

Ολοκληρώσαμε τη διαδικασία και για την μεταβλητή y. Επομένως, αγνοούμε την πρώτη εξίσωση και πάλι και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για το σύστημα:

$$\begin{array}{rrcrcr} r_3: & 2z & - & 8w & = & -22, \\ r_4: & 9z & - & 20w & = & -51. \end{array}$$

Αρχικά διαιρούμε την πρώτη εξίσωση με τον αριθμό 2, έτσι ώστε η μεταβλητή z να έχει συντελεστή ίσο με 1:

$$\begin{array}{rrcrcr} r_3: & z & - & 4w & = & -11, \\ r_4: & 9z & - & 20w & = & -51. \end{array}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $r_4 \leftarrow r_4 - 9r_3$:

$$\begin{array}{rrcrcr} r_3: & z & - & 4w & = & -11, \\ r_4: & & + & 16w & = & 48. \end{array}$$

Σε αυτό το σημείο ολοκληρώσαμε τη διαδικασία. Το τελικό ισοδύναμο σύστημα είναι το

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & 2w & = & -2, \\ & & y & - & 2z & + & 5w & = & 12, \\ & & & & z & - & 4w & = & -11, \\ & & & & & & 16w & = & 48. \end{array}$$

Όταν το σύστημα έρθει σε τριγωνική μορφή μπορούμε εύκολα να το λύσουμε. Από την τελευταία εξίσωση συμπεραίνουμε ότι $w = 3$. Αντικαθιστώντας την τιμή $w = 3$ στην εξίσωση r_3, θα έχουμε $z - 12 = -11$, άρα $z = 1$. Ομοίως αν αντικαταστήσουμε τις τιμές $w = 3$ και $z = 1$ στην r_2 θα έχουμε $y - 2 + 15 = 12$, άρα $y = -1$. Τέλος, αντικαθιστώντας τις τιμές των y, z, w στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε $x = 2$ και έτσι ολοκληρώνουμε την επίλυση του συστήματος. $\square$

Παράδειγμα 4.3. *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} r_1: & 2x & - & y & + & z & + & w & = & 6, \\ r_2: & x & + & y & + & z & + & w & = & 2, \\ r_3: & -x & - & y & + & z & - & w & = & 4. \end{array}$$

Λύση: Αρχικά διαιρούμε την πρώτη εξίσωση με τον αριθμό 2, έτσι ώστε η μεταβλητή x να έχει συντελεστή ίσο με 1. Επομένως το σύστημα γίνεται

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} r_1: & x & - & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{2}z & + & \frac{1}{2}w & = & 3, \\ r_2: & x & + & y & + & z & + & w & = & 2, \\ r_3: & -x & - & y & + & z & - & w & = & 4. \end{array}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τους μετασχηματισμούς $r_2 \leftarrow r_2 - r_1$ και $r_3 \leftarrow r_3 + r_1$, οπότε παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} r_1: & x & - & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{2}z & + & \frac{1}{2}w & = & 3, \\ r_2: & & + & \frac{3}{2}y & + & \frac{1}{2}z & + & \frac{1}{2}w & = & -1, \\ r_3: & & - & \frac{3}{2}y & + & \frac{3}{2}z & - & \frac{1}{2}w & = & 7. \end{array}$$

Αφού ολοκληρώσαμε τη διαδικασία για την μεταβλητή x, αφήνουμε στην άκρη την πρώτη εξίσωση και προχωράμε στην μεταβλητή y:

$$\begin{array}{rcrcrcr} r_2 : \frac{3}{2}y & + & \frac{1}{2}z & + & \frac{1}{2}w & = & -\frac{2}{3}, \\ r_3 : -\frac{3}{2}y & + & \frac{3}{2}z & - & \frac{1}{2}w & = & 7. \end{array}$$

Αρχικά, διαιρούμε την πρώτη εξίσωση με τον αριθμό $\frac{3}{2}$, ώστε η μεταβλητή y να έχει συντελεστή ίσο με 1. Έτσι προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{array}{rcrcrcr} r_2 : y & + & \frac{1}{3}z & + & \frac{1}{3}w & = & -\frac{2}{3}, \\ r_3 : -\frac{3}{2}y & + & \frac{3}{2}z & - & \frac{1}{2}w & = & 7. \end{array}$$

Τέλος, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό, $r_3 \leftarrow r_3 + \frac{3}{2}r_2$, οπότε έχουμε:

$$\begin{array}{rcrcrcr} r_2 : y & + & \frac{1}{3}z & + & \frac{1}{3}w & = & -\frac{2}{3}, \\ r_3 : & & 2z & & & = & 6. \end{array}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $z = 3$ και επομένως (μετά από αντικατάσταση στις εξισώσεις r_1 και r_2) θα έχουμε

$$\begin{array}{rrcrcrcr} r_1 : & x & - & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{2}w & = & \frac{3}{2}, \\ r_2 : & & & y & + & \frac{1}{3}w & = & -\frac{5}{3}. \end{array}$$

Από εδώ παίρνουμε τις σχέσεις $y = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}w$ και $x = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}w$. Συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (με έναν ελεύθερο άγνωστο) της μορφής

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}k,\ -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}k,\ 3,\ k\right),$$

όπου $k \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι όλες οι λύσεις βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία. □

Παράδειγμα 4.4. *Να λυθεί το παρακάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές του k*

$$\begin{array}{rrcrcrcr} r_1 : & x & + & y & + & z & = & 2, \\ r_2 : & x & - & y & - & z & = & 0, \\ r_3 : & -2x & + & y & + & kz & = & 0. \end{array}$$

Λύση: Ακολουθούμε την μέθοδο απαλοιφής του Gauss για την μεταβλητή x, οπότε εφαρμόζουμε τους μετασχηματισμούς $r_2 \leftarrow r_2 - r_1$ και $r_3 \leftarrow r_3 + 2r_1$ και παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{array}{rrcrcrcr} r_1 : & x & + & y & + & z & = & 2, \\ r_2 : & & - & 2y & - & 2z & = & -2, \\ r_3 : & & & 3y & + & (k+2)z & = & 4. \end{array}$$

Ακολούθως, εστιάζουμε στις δύο τελευταίες εξισώσεις:

$$\begin{array}{rcrcr} r_2 : -2y & - & 2z & = & -2, \\ r_3 : +3y & + & (k+2)z & = & 4. \end{array}$$

Αρχικά διαιρούμε την r_2 με τον αριθμό -2, οπότε έχουμε:

$$\begin{array}{rcccccc} r_2: & y & + & z & = & 1, \\ r_3: & 3y & + & (k+2)z & = & 4. \end{array}$$

Τέλος, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $r_3 \leftarrow r_3 - 3r_2$ και παίρνουμε

$$\begin{array}{rcccccc} r_2: & y & + & z & = & 1, \\ r_3: & & + & (k-1)z & = & 1. \end{array}$$

Από την τελευταία εξίσωση συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση αν $k \neq 1$, η οποία είναι η

$$(x, y, z) = \left(1, \frac{k-2}{k-1}, \frac{1}{k-1}\right).$$

Αν $k = 1$, το σύστημα είναι αδύνατο. □

Παράδειγμα 4.5. *Να λυθεί το παρακάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές του k*

$$\begin{array}{rcccccccc} r_1: & x & + & y & + & z & = & 2, \\ r_2: & x & - & y & - & z & = & 0, \\ r_3: & -2x & + & y & + & kz & = & -k. \end{array}$$

Λύση: Το σύστημα μοιάζει αρκετά με αυτό του παραδείγματος 4.4. Αν ακολουθήσουμε την ίδια ακριβώς διαδικασία καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα:

$$\begin{array}{rcccccc} r_2: & y & + & z & = & 1, \\ r_3: & & + & (k-1)z & = & 1-k. \end{array}$$

Επομένως, αν $k \neq 1$, το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y, z) = (1, 2, -1)$. Στην περίπτωση όπου $k = 1$, η τελευταία εξίσωση είναι αόριστη και επομένως καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{array}{rcccccccc} r_1: & x & + & y & + & z & = & 2, \\ r_2: & & & y & + & z & = & 1, \end{array}$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (με έναν ελεύθερο άγνωστο) της μορφής: $(x, y, z) = (3, -1-\zeta, \zeta)$, όπου $\zeta \in \mathbb{R}$. □