

1. ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

1.1 ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΧΩΡΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Τοποθετώ **n** αντικείμενα σε **k** θέσεις ή **ΕΠΙΛΕΓΩ k** αντικείμενα από **n**, έτσι ώστε να μπει ένα αντικείμενο σε κάθε θέση. Μας ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης. Δεν μπορεί να μπει το ίδιο αντικείμενο σε δύο θέσεις.

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

1.2 ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Τοποθετώ **n** αντικείμενα σε **k** θέσεις ή **ΕΠΙΛΕΓΩ k** αντικείμενα από **n**. Μας ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης. Το ίδιο αντικείμενο μπορεί να τοποθετηθεί σε δύο ή περισσότερες θέσεις.

$$\text{Τύπος} = n^k$$

1.3 ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

Τοποθετώ **n** αντικείμενα γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι **k** θέσεων

$$\text{Τύπος} = \frac{\text{Διατάξεις}}{k}$$

Παραδείγματα

1. PWDs μήκους 8 από 256 σύμβολα = 256^8
2. Πίνακες NxM με στοιχεία 0 ή 1 = 2^{NM}
3. Κατευθ. Γράφημα με 5 κορυφές = $2^{5 \cdot 5}$

3. ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

3.1 ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ ΧΩΡΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Επιλέγω από **n** αντικείμενα τα **k**. Δεν μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής. Δεν μπορεί να επιλεγεί το ίδιο αντικείμενο δύο φορές.

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

3.2 ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ ΧΩΡΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Επιλέγω από **n** αντικείμενα τα **k**. Δεν μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής. Το ίδιο αντικείμενο μπορεί να επιλεγεί δύο ή περισσότερες φορές.

$$\text{Τύπος} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

3.3 ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Παραδείγματα

1. Χαρτιά σε τετράδες = $\binom{52}{4}$
2. Υποσύνολα με k στοιχεία από σύνολο Ω n στοιχείων = $\binom{n}{k}$
3. Όλα τα υποσύνολα = $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$
3. Λόττο = $\binom{49}{6}$

5. ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ – ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ (ΑΠΛΗ)

Έχω είδη **όμοιων** αντικειμένων και επιλέγω **k** αντικείμενα για να τα **τοποθετήσω** σε μια θυρίδα με περιορισμούς χωρίς να με ενδιαφέρει η σειρά. Οι όροι $(1+x+x^2+\dots+x^n)$ εκφράζουν πόσα αντικείμενα επιλέγω από κάθε διαφορετικό τύπο αντικειμένων. **Ζητείται ο συντελεστής του x^k .**

Παράδειγμα: Έχω τα **όμοια** είδη αντικ. Α, Β, Γ. Επιλέγω 10 από αυτά ώστε 2-4 να είναι από το είδος Α, το πολύ 5 από το Β, τουλάχιστον 4 από το Γ. $(x^2+x^3+x^4) \cdot (1+x+\dots+x^5) \cdot (x^5+x^6+\dots+x^{10})$. Ζητάω τον συντελεστή του x^{10} .

6. ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ – ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ (ΕΚΘΕΤΙΚΗ)

Έχω **διαφορετικά** αντικείμενα και θέλω να επιλέξω **k** αντικείμενα για να τα **τοποθετήσω** σε μια θυρίδα με περιορισμούς χωρίς να με ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης. Οι όροι $(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!})$ εκφράζουν πόσα αντικείμενα επιλέγω. **Ζητείται ο συντελεστής του $\frac{x^k}{k!}$.**

Παράδειγμα: Όπως στο 5, αλλά με **άπειρα διαφορ.** αντικείμενα $\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right) \cdot \left(1+x+\dots+\frac{x^5}{5!}\right) \cdot \left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\dots+\frac{x^{10}}{10!}\right)$
Ζητάω τον συντελεστή του $x^{10}/10!$.

2.. ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

2.1 ΑΠΛΕΣ ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

Έχουμε **n** αντικείμενα τα οποία τοποθετούμε σε σειρά

$$\text{Τύπος} = n!$$

2.2 ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ ΟΜΟΙΩΝ ΟΜΑΔΩΝ

Έχουμε **n** αντικείμενα που χωρίζονται σε k ομάδες των $q_1, q_2, \dots, q_k$, αντικειμένων, τα οποία τοποθετούμε σε σειρά

$$\text{Τύπος} = \frac{n!}{q_1! q_2! \dots q_k!}$$

2.3 ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

Τοποθετώ **n** αντικείμενα γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι **n** θέσεων.

$$\text{Τύπος} = \frac{\text{Μεταθέσεις}}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Αφού υπάρχουν n ίδιες μεταθέσεις που δημιουργούνται απλά μεταφέροντας κυκλικά την ίδια μετάθεση.

Παραδείγματα

1. Αναγραμματισμοί λέξεων. Π.χ. ANNA = $\frac{4!}{2!2!}$
2. Παραγγελίες (π.χ. καφέ). 7 φίλοι 2Φ, 3Ε, 2Κ = $\frac{7!}{2!3!2!}$
3. Δυαδικές Συμβολοσειρές με 3 φορές το 1 = $\frac{8!}{5!3!}$

4. ΔΙΑΝΟΜΗ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

Διανέμω **n** αντικείμενα σε **m** υποδοχές. Κάθε υποδοχή μπορεί να πάρει από 0 έως n αντικείμενα. Διανέμονται όλα τα αντικείμενα και οι υποδοχές είναι διαφορετικές.

4.1 ΟΜΟΙΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ

$$\text{Τύπος} = \binom{m+n-1}{n}$$

4.2 ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ (ΧΩΡΙΣ ΣΕΙΡΑ ΣΤΗΝ ΥΠΟΔΟΧΗ)

$$\text{Τύπος} = m^n$$

Αντιστοιχίζουμε κάθε αντικείμενο με έναν αριθμό που δηλώνει την υποδοχή

4.3 ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ (ΜΕ ΣΕΙΡΑ ΣΤΗΝ ΥΠΟΔΟΧΗ)

Εδώ έχει σημασία ποιο διανέμεται πρώτο, ποιο δεύτερο κ.λ.π. σε κάθε υποδοχή.

$$\text{Τύπος} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}$$

Παραδείγματα

1. Η εξίσωση $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$ έχει $\binom{m+n-1}{n}$ ακέραιες λύσεις. (Μοιράζουμε **n** μονάδες σε **m** υποδοχές.)
2. **Διανομή Όμοιων Ομάδων:** Με πόσους τρόπους τοποθετώ 3Α και 5Μ μπάλες σε 4 υποδοχές = $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{5}$

7. ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ (ΤΡΟΠ. ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ)

Έχω **διαφορετικά** αντικείμενα και θέλω να επιλέξω **k** αντικείμενα για να τα **τοποθετήσω** σε μια θυρίδα με περιορισμούς. Εδώ με ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης. Οι όροι $(1+1!\frac{x}{1!}+2!\frac{x^2}{2!}+\dots+n!\frac{x^n}{n!})$ εκφράζουν πόσα αντικείμενα επιλέγω μπορούν να μπου στην συγκεκριμένη θυρίδα. **Ζητείται ο συντελεστής του $\frac{x^k}{k!}$.**

8. Παραδείγματα Γεννητριών

ΠΡΟΣΟΧΗ: ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΔΙΑΝΕΜΟΝΤΑΙ ΟΛΑ ΤΑ ΑΝΤΙΚ.

1. Ακ. Θετ. Λύσεις της $5x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 1000$. Κάνω αντικαταστάσεις και έχω $z_1 + z_2 + z_3 = 1000$. Η γεννήτρια είναι $(1+x^5+\dots+x^{1000})(1+x^{10}+\dots+x^{1000})(1+x^{20}+\dots+x^{1000})$. Ψάχνω τον συντελεστή του x^{1000} .
2. Ακ. Θετ. Λύσεις της $x_1 + x_2 + x_3 = 100$, με $x_1 \geq x_2, x_2 \geq x_3$. Θέτω $x_1 = x_2 + u_2, x_2 = x + 3 + u_3$, οπότε έχω $u_2 + 2u_3 + 3x_3 = 100$. Άρα Γεννήτρια είναι η $(1+x+\dots+x^{100})(1+x^2+\dots+x^{100})(1+x^3+\dots+x^{99})$. Ψάχνω τον συντ. του x^{100} .
3. Έχω 6 αντίτυπα του βιβλ Β1, 7 του Β2, 11 του Β3. Τα μοιράζω σε 2 φοιτητές έτσι ώστε κάθε ένας να πάρει 12 βιβλία και το λιγότερο 2 αντίτυπα από κάθε βιβλίο: Αφού τα βιβλία είναι όμοια έχω απλή γεννήτρια. Μοιράζω 12 στον ένα φοιτητή: Γεννήτρια: $(x^2+\dots+x^4)(x^2+\dots+x^5)(x^2+\dots+x^9)$. Ψάχνω συντ. του x^{12} .
4. Τοποθετώ 3Μ μπάλες σε 4 υποδοχές: Γεννήτρια: $(1+x+\dots+x^3)^4$. Ψάχνω συντ του x^3 .

8B. Παραδείγματα Γεννητριών 5. Με πόσους τρόπους μπορώ να κατασκευάσω μια δυαδική συμβολοσειρά με άρτιους 1 και περιττά 0 μήκους 5? Διανέμω 5 διαφορ. Αντικείμενα (θέσεις συμβολ.) σε δύο υποδοχές (0, 1). Εκθ. Γεννήτρια: $\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)$, συντελεστής του $\frac{x^5}{5!}$. 6. Έχω 10 αριθμημ. βόλους. Με πόσους τρόπους μπορώ να τους μοιράσω σε 3 παιδιά, ώστε το Α να πάρει 3, το Β το πολύ 2 και το Γ τουλάχιστον 6? Εκθ. Γεννήτρια: $\frac{x^3}{3!}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)\left(\frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{10}}{10!}\right)$, συντ του ψ. 7. Έχω 10 (διαφορ) επιβάτες σε ένα τρένο. Με πόσους τρόπους μπορούν να κατέβουν στις επόμενες 3 στάσεις, ώστε στην Α να κατέβουν 3, στην Β το πολύ 2 και στην Γ τουλάχιστον 6? Έχει σημασία η σειρά με την οποία κατεβαίνουν. Τροπ. Εκθ. Γεννήτριας: $3!\frac{x^3}{3!}\left(1 + x + 2!\frac{x^2}{2!}\right)\left(6!\frac{x^6}{6!} + \dots + 10!\frac{x^{10}}{10!}\right)$ συντ του $\frac{x^{10}}{10!}$. 8. Ένα πλοίο διαθέτει 48 σημαίες, 12 κοκκινες, 12 ασπρες, 12 μαύρες, 12 μπλε. Τοποθετούμε 12 σε έναν ιστό για να στέλνουμε μνμ. Με πόσους τρόπους μπορούμε να φτιάξουμε μνμ με άρτιο αρ ΜΠΛΕ σημαιών και περιττό αρ. ΑΣΠΡΩΝ. Διανέμω 12 διαφορετικές θέσεις (1,2,..12) σε 4 υποδοχές (χρώματα) Εκθ. Γεννήτρια: $\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{12}}{12!}\right)^2\left(x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{11}}{11!}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{12}}{12!}\right)$. (ΜΑΥΡ+ΚΟΚ – ΑΣΠ – ΜΠΛΕ) Συντ του $\frac{x^{12}}{12!}$ 9. Φτιάχνω συμβολοσειρές μήκους 10 με τα γράμματα Α, Β, Γ, ώστε κάθε γράμμα να εμφ. Τουλ 1 φορά, το Α άρτιο πλήθος και το Γ περιττό. Διανέμω 10 διαφ. Αντικείμενα (1,2,...,10) σε 3 υποδοχές (Α, Β, Γ) Εκθ. Γεννήτρια: $\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{10}}{10!}\right)\left(x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{10}}{10!}\right)\left(x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^9}{9!}\right)$. (Α – Β – Γ) Συντ του $\frac{x^{10}}{10!}$	9. ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ Προτασιακές Μεταβλητές, Προτασιακός Σύνδεσμος, Προτασιακός Τύπος Ο $\rightarrow$ δίνει πάντα Α εκός αν $A \rightarrow \Psi$, που δίνει Ψ. Ο $\leftrightarrow$ δίνει Α αν οι δύο μεταβλητές έχουν ίδια τιμή. Δίνει Ψ αλλιώς. Προτεραιότητα: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$. Αποτίμηση του Τύπου (το αποτέλεσμα του τύπου σε μια αποτίμηση μετ) Ταυτολογία: (αν ο τύπος είναι Α για κάθε αποτίμηση) Αντίφαση: (αν ο τύπος είναι Ψ για κάθε αποτίμηση) Ικανοποιησιμος (αν υπάρχει αποτίμηση για την οποία είναι Α) Κανονική Διαξευκτική Μορφή (ΚΔΜ) $\rightarrow$ κάνω αληθοπίνακα ΠΛΗ10 Γνωστές Ταυτολογίες: $p \vee \neg p, p \rightarrow p, p \rightarrow p, p \leftrightarrow p, p \rightarrow q$ με p αντίφαση ή q ταυτολογία Γνωστές Αντιφάσεις: $p \wedge \neg p, p \leftrightarrow \neg p, \neg p, \text{όπου } p \text{ ταυτολογία}, p \rightarrow q, \text{όπου } p \text{ ταυτολογία και } q \text{ αντίφαση}.$ Σύνολα τύπων: Ένα υποσύνολο του $T(\Gamma_0)$. Ικανοποιησιμο: υπάρχει αποτίμηση που κάνει όλους τους τύπους Α. Αντιφατικό: Δεν υπάρχει τέτοια αποτίμηση. $\Rightarrow$ Κατασκευάζω Αληθοπίνακα και κοιτάω αν υπάρχει γραμμή Α Ταυτολογική συνεπαγωγή $T \models \varphi$: Ένα σύνολο τύπων T ταυτολογικά συνεπάγεται τον τύπο φ αν για κάθε αποτίμηση που ικανοποιούνται όλοι οι τύποι του T ικανοποιείται και ο φ. Ισχύουν οι: $? \models A$, Αντιφατικό $\models ?$ $\models \varphi$ ή $\emptyset \models \varphi$, αρκεί να δείξω ότι ο φ είναι ταυτολογία. Ταυτολογικά Ισοδύναμοι Τύποι: $\varphi \equiv \psi$: Δύο τύποι λέγονται ταυτ. Ισοδύναμοι ανν $\varphi \models \psi$ και $\psi \models \varphi$, δηλαδή ανν έχουν τον ίδιο πίνακα αλήθειας																				
11. ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Αξιωματικά Σχήματα ΑΣ1: $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ ΑΣ2: $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ ΑΣ3 $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$ Modus Ponens (MP): Αν ισχύει ο φ και ο $\varphi \rightarrow \psi$ τότε ισχύει και ο ψ. Χρησιμοποιούνται για την απόδειξη Τυπικής Συνεπαγωγής $T \vdash \varphi$ Συλλογιστική Προς τα Εμπρός: Την εφαρμόζω αν το δεξί μέλος έχει μικρό μήκος σε σχέση με τους τύπους αριστερά. Ταυτίζω τις υποθέσεις (τύπους) με το αρ. Μέλος ενός αξιωματικού σχήματος και με MP προκύπτει το δεξί μέλος. Συλλογιστική Προς τα Πίσω: Την εφαρμόζω αν το δεξί μέλος έχει μεγάλο μήκος σε σχέση με τους τύπους αριστερά. Ταυτίζω τον προς απόδειξη τύπο με το δεξί. Μέλος ενός αξιωματικού σχήματος και βρίσκω μια χρήσιμη Συντακτική Αντικατάσταση. Τυπικά Θεωρήματα 1. $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ 2. $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ 3. $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ Θεωρήματα Προτασιακού Λογισμού 1. Θεώρημα Απαγωγής: Αν $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ τότε $T \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ 2. Θ. Αντιθετοαναστροφής: $T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$ ανν $T \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$ 3. Θ. Απαγωγής σε Άτοπο: Αν το $T \cup \{\varphi\}$ είναι αντιφατικό τότε $T \vdash \neg\varphi$ Στον Προτ. Λογισμό ένα σύνολο τύπων T λέγεται αντιφατικό αν υπάρχει κάποιος τύπος ψ τέτοιος ώστε $T \vdash \psi$ και $T \vdash \neg\psi$. Αν ένα σύνολο τύπων δεν είναι αντιφατικό λέγεται συνεπές.	10. ΝΟΜΟΙ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ Τους χρησιμοποιούμε για να μετατρέψουμε τύπους σε άλλους ισοδύναμους ώστε να χρησιμοποιούν μόνο συγκεκριμένους τελεστές. Όλοι οι νόμοι είναι ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΕΣ 1. Αντιμεταθετικότητα: $\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi, \quad \varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi.$ 2. Προσεταιριστικότητα: $\varphi \wedge (\psi \wedge \sigma) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma$ $\varphi \vee (\psi \vee \sigma) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \vee \sigma$ 3. Επιμεριστικότητα $\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$ $\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$ 4. Διπλή Άρνηση $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$ 5. Άρνηση Συνεπαγωγής $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \neg\psi$ 6. De Morgan $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$ $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$ 7. Αντιθετοαναστροφή $\varphi \rightarrow \psi \leftrightarrow \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ 8. Εξαγωγή $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \sigma$ 9. 1^{ος} Νόμος Αντικατάστασης $(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$ 10. 2^{ος} Νόμος Αντικατ $(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$ 11. Αποκλεισμός Τρίτου $\emptyset \models \neg\varphi \vee \varphi$																				
12B. Αποδείξεις Προτασιακού Λογισμού 3. $\{\neg\neg\varphi\} \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi$ Απόδειξη με προς τα ΠΣΩ συλλογιστική Ταύτιση του συμπεράσματος με το δεξί μέλος του ΑΣ3. Άρα αρκεί να δ.ο. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$ <table><tr><td>1. $\neg\neg\varphi$</td><td>ΥΠΟΘΕΣΗ</td></tr><tr><td>2. $\neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$</td><td>ΑΣ1</td></tr><tr><td>3. $\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$</td><td>MP 1,2</td></tr><tr><td>4. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi)$</td><td>ΑΣ3</td></tr><tr><td>5. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi$</td><td>MP 3,4</td></tr></table>	1. $\neg\neg\varphi$	ΥΠΟΘΕΣΗ	2. $\neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$	ΑΣ1	3. $\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$	MP 1,2	4. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi)$	ΑΣ3	5. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi$	MP 3,4	11. ΣΥΝΔΕΣΗ ΛΟΓΙΚΗΣ - ΛΟΓΙΣΜΟΥ <table><tr><td>Προτασιακή Λογική</td><td>Προτασιακός Λογισμός</td></tr><tr><td>Μη ικανοποιησιμο Σύνολο</td><td>Αντιφατικό Σύνολο</td></tr><tr><td>Ικανοποιήσιμο</td><td>Συνεπής</td></tr><tr><td>$T \models \varphi$</td><td>$T \vdash \varphi$</td></tr><tr><td>φ ταυτολογία</td><td>φ τυπικό Θεώρημα</td></tr></table> Θεώρημα Εγκυρότητας: Αν $T \vdash \varphi$ τότε $T \models \varphi$. Θεώρημα Πληρότητας: Αν $T \models \varphi$ τότε $T \vdash \varphi$.	Προτασιακή Λογική	Προτασιακός Λογισμός	Μη ικανοποιησιμο Σύνολο	Αντιφατικό Σύνολο	Ικανοποιήσιμο	Συνεπής	$T \models \varphi$	$T \vdash \varphi$	φ ταυτολογία	φ τυπικό Θεώρημα
1. $\neg\neg\varphi$	ΥΠΟΘΕΣΗ																				
2. $\neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$	ΑΣ1																				
3. $\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$	MP 1,2																				
4. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi)$	ΑΣ3																				
5. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi$	MP 3,4																				
Προτασιακή Λογική	Προτασιακός Λογισμός																				
Μη ικανοποιησιμο Σύνολο	Αντιφατικό Σύνολο																				
Ικανοποιήσιμο	Συνεπής																				
$T \models \varphi$	$T \vdash \varphi$																				
φ ταυτολογία	φ τυπικό Θεώρημα																				
12A. Αποδείξεις Προτασιακού Λογισμού 1. $\{(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi), \neg\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi), \neg\psi\} \vdash \psi \rightarrow \varphi$ Απόδειξη με χρήση κανόνα MP <table><tr><td>1. $\neg\psi$</td><td>ΥΠΟΘΕΣΗ</td></tr><tr><td>2. $\neg\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$</td><td>ΥΠΟΘΕΣΗ</td></tr><tr><td>3. $\varphi \rightarrow \chi$</td><td>MP 1,2</td></tr><tr><td>4. $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$</td><td>ΥΠΟΘΕΣΗ</td></tr><tr><td>5. $\psi \rightarrow \varphi$</td><td>MP 3,4</td></tr></table> 2. $\{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi$ Απόδειξη με προς τα ΕΜΠΡΟΣ συλλογιστική. Ταύτιση με ΑΣ2. <table><tr><td>1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$</td><td>ΥΠΟΘΕΣΗ</td></tr><tr><td>2. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$</td><td>ΑΣ2</td></tr><tr><td>3. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$</td><td>MP 1,2</td></tr><tr><td>4. $\varphi \rightarrow \psi$</td><td>ΥΠΟΘΕΣΗ</td></tr><tr><td>5. $\varphi \rightarrow \chi$</td><td>MP 4,3</td></tr></table>	1. $\neg\psi$	ΥΠΟΘΕΣΗ	2. $\neg\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$	ΥΠΟΘΕΣΗ	3. $\varphi \rightarrow \chi$	MP 1,2	4. $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	ΥΠΟΘΕΣΗ	5. $\psi \rightarrow \varphi$	MP 3,4	1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	ΥΠΟΘΕΣΗ	2. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$	ΑΣ2	3. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$	MP 1,2	4. $\varphi \rightarrow \psi$	ΥΠΟΘΕΣΗ	5. $\varphi \rightarrow \chi$	MP 4,3	
1. $\neg\psi$	ΥΠΟΘΕΣΗ																				
2. $\neg\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$	ΥΠΟΘΕΣΗ																				
3. $\varphi \rightarrow \chi$	MP 1,2																				
4. $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	ΥΠΟΘΕΣΗ																				
5. $\psi \rightarrow \varphi$	MP 3,4																				
1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	ΥΠΟΘΕΣΗ																				
2. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$	ΑΣ2																				
3. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$	MP 1,2																				
4. $\varphi \rightarrow \psi$	ΥΠΟΘΕΣΗ																				
5. $\varphi \rightarrow \chi$	MP 4,3																				

12Γ. Αποδείξεις Προτασιακού Λογισμού 4. $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\chi \rightarrow \varphi))$ Απόδειξη με χρήση Θεωρημάτων Χρησιμοποιώ το θ. Απαγωγής. Αρκεί να δ.ο. $\{\varphi\} \vdash \psi \rightarrow (\chi \rightarrow \varphi)$. Εφαρμόζω και δεύτερη φορά το θ. Απαγωγής, άρα αρκεί να δ.ο. $\{\varphi, \psi\} \vdash \chi \rightarrow \varphi$. Εφαρμόζω και τρίτη φορά το θ. Απαγωγής, άρα αρκεί να δ.ο. $\{\varphi, \psi, \chi\} \vdash \varphi$. Επομένως, η τυπική απόδειξη για την τελευταία είναι: 1. φ ΥΠΟΘΕΣΗ 5. $\vdash \varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi))$ Απόδειξη με χρήση Θεωρημάτων Εφαρμόζω δύο φορές το θ. Απαγωγής, άρα αρκεί να δ.ο. $\{\varphi, \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi)$. Στη συνέχεια εφαρμόζω το θ. Αντιθετοαναστροφής και επομένως αρκεί να δ.ο. $\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \neg\neg\psi$. Η τυπική απόδειξη για την τελευταία σχέση είναι: 1. φ ΥΠΟΘΕΣΗ 2. $\varphi \rightarrow \psi$ ΥΠΟΘΕΣΗ 3. ψ MP1,2 4. $\psi \rightarrow \neg\neg\psi$ Τυπικό Θεώρημα 5. $\neg\neg\psi$ MP 3,4																																	
13. Κατηγορηματική Λογική 1. ΠΟΣΟΔΕΙΚΤΕΣ $\exists, \forall$, Υπάρχει, Για κάθε. Η εμβέλεια ενός ποσοδείκτη φτάνει μέχρι τον πρώτο διμελή σύνδεσμο που συναντάμε. $\exists[\dots \wedge \dots], \quad \forall[\dots \rightarrow \dots]$ 2. Προτεραιότητα: $(\exists, \forall, \neg), (\wedge, \vee), (\rightarrow, \leftrightarrow)$ 3. Συντομογραφίες: $E(x) \equiv \exists y[x + y = x]$																																	
14. Μεταφραστικός Πίνακας ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΗΣ <table> <tr> <th>ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ ΣΕ ΚΑΤ</th><th>ΜΟΡΦΗ ΠΡΟΤΑΣΗΣ</th></tr> <tr> <td>$\neg P$</td><td>Δεν ισχύει η P</td></tr> <tr> <td>$P_1 \wedge P_2$</td><td>Ισχύει και η P1 και η P2</td></tr> <tr> <td>$P_1 \vee P_2$</td><td>Ισχύει είτε η P1 είτε η P2</td></tr> <tr> <td>$P_1 \rightarrow P_2$</td><td>Αν ισχύει η P1 τότε ισχύει η P2</td></tr> <tr> <td>$P_1 \leftrightarrow P_2$</td><td>Η P1 ισχύει αν και μόνο αν ισχύει η P2</td></tr> <tr> <td>$\exists x[P]$</td><td>Υπάρχει στοιχείο x για το οποίο ισχύει η πρόταση P</td></tr> <tr> <td>$\forall x[P]$</td><td>Για κάθε στοιχείο P ισχύει η πρόταση P</td></tr> <tr> <td>$\exists x \exists y[P]$</td><td>Υπάρχουν δύο στοιχεία (ζεύγος) για τα οποία ισχύει η πρόταση.</td></tr> <tr> <td>$\forall x \forall y[P]$</td><td>Για κάθε ζεύγος στοιχείων ισχύει η πρόταση</td></tr> <tr> <td>$\exists x \forall y[P]$</td><td>Υπάρχει στοιχείο x για το οποίο ικανοποιείται η P για κάθε y.</td></tr> <tr> <td>$\forall x \exists y[P]$</td><td>Για κάθε στοιχείο x υπάρχει στοιχείο y που να ικανοποιείτ ην πρόταση P.</td></tr> <tr> <td>$\exists x \exists y[(x \neq y) \wedge P]$</td><td>Υπάρχει ζεύγος διαφορετικών στοιχείων για τα οποία ισχύει η πρόταση P.</td></tr> <tr> <td>$\forall x \forall y[(x \neq y) \rightarrow P]$</td><td>Για κάθε ζεύγος διαφορετικών στοιχείων ισχύει η πρόταση P.</td></tr> <tr> <td>$\exists x[P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow x \approx y)]$</td><td>Υπάρχει ΜΟΝΑΔΙΚΟ στοιχείο για το οποίο ισχύει η σχέση P</td></tr> <tr> <td>$\exists x \exists y[P(x) \wedge P(y) \wedge (x \neq y) \wedge \forall z(P(z) \rightarrow (z \approx x) \vee (z \approx y))]$</td><td>Υπάρχουν ακριβώς δύο στοιχεία για τα οποία ισχύει η σχέση P.</td></tr> </table>		ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ ΣΕ ΚΑΤ	ΜΟΡΦΗ ΠΡΟΤΑΣΗΣ	$\neg P$	Δεν ισχύει η P	$P_1 \wedge P_2$	Ισχύει και η P1 και η P2	$P_1 \vee P_2$	Ισχύει είτε η P1 είτε η P2	$P_1 \rightarrow P_2$	Αν ισχύει η P1 τότε ισχύει η P2	$P_1 \leftrightarrow P_2$	Η P1 ισχύει αν και μόνο αν ισχύει η P2	$\exists x[P]$	Υπάρχει στοιχείο x για το οποίο ισχύει η πρόταση P	$\forall x[P]$	Για κάθε στοιχείο P ισχύει η πρόταση P	$\exists x \exists y[P]$	Υπάρχουν δύο στοιχεία (ζεύγος) για τα οποία ισχύει η πρόταση.	$\forall x \forall y[P]$	Για κάθε ζεύγος στοιχείων ισχύει η πρόταση	$\exists x \forall y[P]$	Υπάρχει στοιχείο x για το οποίο ικανοποιείται η P για κάθε y.	$\forall x \exists y[P]$	Για κάθε στοιχείο x υπάρχει στοιχείο y που να ικανοποιείτ ην πρόταση P.	$\exists x \exists y[(x \neq y) \wedge P]$	Υπάρχει ζεύγος διαφορετικών στοιχείων για τα οποία ισχύει η πρόταση P.	$\forall x \forall y[(x \neq y) \rightarrow P]$	Για κάθε ζεύγος διαφορετικών στοιχείων ισχύει η πρόταση P.	$\exists x[P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow x \approx y)]$	Υπάρχει ΜΟΝΑΔΙΚΟ στοιχείο για το οποίο ισχύει η σχέση P	$\exists x \exists y[P(x) \wedge P(y) \wedge (x \neq y) \wedge \forall z(P(z) \rightarrow (z \approx x) \vee (z \approx y))]$	Υπάρχουν ακριβώς δύο στοιχεία για τα οποία ισχύει η σχέση P.
ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ ΣΕ ΚΑΤ	ΜΟΡΦΗ ΠΡΟΤΑΣΗΣ																																
$\neg P$	Δεν ισχύει η P																																
$P_1 \wedge P_2$	Ισχύει και η P1 και η P2																																
$P_1 \vee P_2$	Ισχύει είτε η P1 είτε η P2																																
$P_1 \rightarrow P_2$	Αν ισχύει η P1 τότε ισχύει η P2																																
$P_1 \leftrightarrow P_2$	Η P1 ισχύει αν και μόνο αν ισχύει η P2																																
$\exists x[P]$	Υπάρχει στοιχείο x για το οποίο ισχύει η πρόταση P																																
$\forall x[P]$	Για κάθε στοιχείο P ισχύει η πρόταση P																																
$\exists x \exists y[P]$	Υπάρχουν δύο στοιχεία (ζεύγος) για τα οποία ισχύει η πρόταση.																																
$\forall x \forall y[P]$	Για κάθε ζεύγος στοιχείων ισχύει η πρόταση																																
$\exists x \forall y[P]$	Υπάρχει στοιχείο x για το οποίο ικανοποιείται η P για κάθε y.																																
$\forall x \exists y[P]$	Για κάθε στοιχείο x υπάρχει στοιχείο y που να ικανοποιείτ ην πρόταση P.																																
$\exists x \exists y[(x \neq y) \wedge P]$	Υπάρχει ζεύγος διαφορετικών στοιχείων για τα οποία ισχύει η πρόταση P.																																
$\forall x \forall y[(x \neq y) \rightarrow P]$	Για κάθε ζεύγος διαφορετικών στοιχείων ισχύει η πρόταση P.																																
$\exists x[P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow x \approx y)]$	Υπάρχει ΜΟΝΑΔΙΚΟ στοιχείο για το οποίο ισχύει η σχέση P																																
$\exists x \exists y[P(x) \wedge P(y) \wedge (x \neq y) \wedge \forall z(P(z) \rightarrow (z \approx x) \vee (z \approx y))]$	Υπάρχουν ακριβώς δύο στοιχεία για τα οποία ισχύει η σχέση P.																																
15. Για Αριθμούς <table> <tr> <td>Ο αριθμός 1</td><td>$E[x] \equiv \forall y[x \cdot y \approx y]$ Η συντομογραφία αληθεύει αν x=1</td></tr> <tr> <td>Ο αριθμός 0</td><td>$M[x] \equiv \forall y[x \cdot y \approx x]$ $M[x] \equiv \forall y[x + y \approx y]$ $M[x] \equiv \forall y[x \leq y]$ Και οι 3 συντομογραφίες αληθεύουν αν x=0</td></tr> <tr> <td>Ο αριθμός x είναι άρτιος</td><td>$\exists y[x \approx 2 \cdot y], \text{ ή } \exists y[x \approx y + y].$</td></tr> <tr> <td>Ο αριθμός x είναι περιττός</td><td>$\neg \exists y[x \approx 2 \cdot y], \text{ ή } \exists y[x \approx 2 \cdot y + 1],$</td></tr> <tr> <td>Ο αριθμός x διαιρείται από τον y (ο x είναι πολλαπλάσιος του y)</td><td>$D[x, y] \equiv \exists z[x \approx y \cdot z]$</td></tr> <tr> <td>Ο αριθμός x είναι πρώτος (δηλαδή διαιρείται μόνο από τον 1 και τον εαυτό του)</td><td>$\forall y \forall z[x \approx y \cdot z \rightarrow (y \approx 1) \vee (z \approx 1)]$ $\forall y \forall z[x \approx y \cdot z \rightarrow (y \approx x) \vee (z \approx x)]$</td></tr> </table> 1. Το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος. Ορίζω $E[x] \equiv \exists y[x \approx y + y]$ και $O[x] \equiv \exists y[x \approx y + y + 1]$ Οπότε: $\forall x \forall y [O(x) \wedge O(y) \rightarrow E(x + y)]$ 2. Κάθε αριθμός που είναι πρώτος και άρτιος διαιρείται με το 2 Ορίζω $P(x) = \forall y \forall z [x \approx y \cdot z \rightarrow (y \approx x) \vee (z \approx x)]$ και $D[x, y] \equiv \exists z [x \approx y \cdot z]$ τότε: $\forall x [P(x) \wedge E(x) \rightarrow D(x, 2)]$ 3. Υπάρχει μοναδικός φυσικός αριθμός που είναι πρώτος και άρτιος. $\exists x [P(x) \wedge E(x) (\forall y (P(y) \wedge E(y) \rightarrow y \approx x))]$ 4. Υπάρχει μοναδικό ελάχιστο στοιχείο των φυσικών αριθμών $\exists x [\forall y (x \leq y)]$		Ο αριθμός 1	$E[x] \equiv \forall y[x \cdot y \approx y]$ Η συντομογραφία αληθεύει αν x=1	Ο αριθμός 0	$M[x] \equiv \forall y[x \cdot y \approx x]$ $M[x] \equiv \forall y[x + y \approx y]$ $M[x] \equiv \forall y[x \leq y]$ Και οι 3 συντομογραφίες αληθεύουν αν x=0	Ο αριθμός x είναι άρτιος	$\exists y[x \approx 2 \cdot y], \text{ ή } \exists y[x \approx y + y].$	Ο αριθμός x είναι περιττός	$\neg \exists y[x \approx 2 \cdot y], \text{ ή } \exists y[x \approx 2 \cdot y + 1],$	Ο αριθμός x διαιρείται από τον y (ο x είναι πολλαπλάσιος του y)	$D[x, y] \equiv \exists z[x \approx y \cdot z]$	Ο αριθμός x είναι πρώτος (δηλαδή διαιρείται μόνο από τον 1 και τον εαυτό του)	$\forall y \forall z[x \approx y \cdot z \rightarrow (y \approx 1) \vee (z \approx 1)]$ $\forall y \forall z[x \approx y \cdot z \rightarrow (y \approx x) \vee (z \approx x)]$																				
Ο αριθμός 1	$E[x] \equiv \forall y[x \cdot y \approx y]$ Η συντομογραφία αληθεύει αν x=1																																
Ο αριθμός 0	$M[x] \equiv \forall y[x \cdot y \approx x]$ $M[x] \equiv \forall y[x + y \approx y]$ $M[x] \equiv \forall y[x \leq y]$ Και οι 3 συντομογραφίες αληθεύουν αν x=0																																
Ο αριθμός x είναι άρτιος	$\exists y[x \approx 2 \cdot y], \text{ ή } \exists y[x \approx y + y].$																																
Ο αριθμός x είναι περιττός	$\neg \exists y[x \approx 2 \cdot y], \text{ ή } \exists y[x \approx 2 \cdot y + 1],$																																
Ο αριθμός x διαιρείται από τον y (ο x είναι πολλαπλάσιος του y)	$D[x, y] \equiv \exists z[x \approx y \cdot z]$																																
Ο αριθμός x είναι πρώτος (δηλαδή διαιρείται μόνο από τον 1 και τον εαυτό του)	$\forall y \forall z[x \approx y \cdot z \rightarrow (y \approx 1) \vee (z \approx 1)]$ $\forall y \forall z[x \approx y \cdot z \rightarrow (y \approx x) \vee (z \approx x)]$																																
16. Σύμπαν με αντικείμενα Π.χ. Άτομα με κατηγορήματα FatherOf(x,y), Person(x) και σταθερές tom, john, ian 1. Ο tom έχει πατέρα $\exists x [Person(x) \wedge FatherOf(x, tom)]$ 2. Κάθε άτομο έχει πατέρα $\forall x [Person(x) \rightarrow \exists y (Person(y) \wedge FatherOf(y, x))]$ Αν δεν μας δινόταν το κατηγορήμα Person τότε θα γράφαμε $\forall x \exists y (FatherOf(y, x))$ 3. Υπάρχουν αδέρφια $\exists x \exists y \exists z [(x \neq y) \wedge Person(x) \wedge Person(y) \wedge Person(z) \wedge FatherOf(z, x) \wedge FatherOf((z, y))]$ 4. Υπάρχει άτομο που είναι πατέρας όλων $\exists x [Person(x) \wedge \forall y (Person(y) \rightarrow FatherOf(x, y))]$ 5. Δεν υπάρχουν άτομα που ο ένας να είναι πατέρας του άλλου $\neg (\exists x \exists y [Person(x) \wedge Person(y) \wedge fatherOf(x, y) \wedge fatherOf(y, x)])$ 6. Υπάρχει πατέρας με δύο παιδιά $\exists x \exists y \exists z [P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \wedge (z \neq y) \wedge F(x, y) \wedge F(x, z)]$																																	
17. Για Πραγματικούς Αριθμούς 1. Ο αριθμός 1/3: $A(x) \equiv \forall y [x \cdot y + x \cdot y + x \cdot y \approx y]$ ($3xy=y$) 2. Το σύνολο των ≥ 0: $\theta M(x) \equiv \exists y [x \approx y \cdot y]$ ($x = y^2 \geq 0$). 3. Ο αριθμός $\sqrt{3}$: $B(x) \equiv \forall y [(x \cdot x \cdot y \approx y + y + y) \wedge \theta M(x)]$ ($x^2 y = 3y$ και $x \geq 0$) 4. Ο -1/3: $MA(x) \equiv \exists y \exists z [(x + z \approx y) \wedge M(y) \wedge A(z)]$, όπου το M(y) αληθεύει αν το y είναι 0 και το A(z) αληθεύει αν το z είναι το 1/3. 5. Το σύνολο $[\frac{1}{3}, +\infty)$: $\exists z [\theta M(z + x) \wedge MA(z)]$, όπου το MA(z) αληθεύει αν το z είναι το -1/3.																																	

18. ΝΟΜΟΙ ΚΛ	
ΝΟΜΟΙ	
Άρνηση Ποσοδείκτη	$\neg \forall x[P] \leftrightarrow \exists x[\neg P]$ $\neg \exists x[P] \leftrightarrow \forall x[\neg P]$
Κατανομή Ποσοδεικτών	$\forall x[P \wedge Q] \leftrightarrow \forall x[P] \wedge \forall x[Q]$ $\exists x[P \vee Q] \leftrightarrow \exists x[P] \vee \exists x[Q]$
Εναλλαγή Ποσοδεικτών	$\forall x \forall y[P] \leftrightarrow \forall y \forall x[P]$ $\exists x \exists y[P] \leftrightarrow \exists y \exists x[P]$
Μετακίνηση Ποσοδείκτη	$P \rightarrow \forall x[Q] \leftrightarrow \forall x[P \rightarrow Q]$ $P \rightarrow \exists x[Q] \leftrightarrow \exists x[P \rightarrow Q]$ $\forall x[P] \rightarrow Q \leftrightarrow \exists x[P \rightarrow Q]$ $\exists x[P] \rightarrow Q \leftrightarrow \forall x[P \rightarrow Q]$

19. ΕΠΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ

ΓΙΑ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Βήμα 1- Βάση της Επαγωγής: Δείχνουμε ότι ισχύει η πρόταση για κάποιος αρχικούς τύπους.

Βήμα 2 – Επαγωγική Υπόθεση. Υποθέτω ότι η πρόταση ισχύει για δύο τύπους p, q .

Βήμα 3 – Επαγωγικό Βήμα: Δείχνουμε ότι η πρόταση ισχύει για τους τύπους

$\neg p,$
 $p \wedge q,$
 $p \vee q,$
 $p \rightarrow q,$
 $p \leftrightarrow q$

Παράδειγμα: Κάθε προτασιακός τύπος μπορεί να μετατραπεί σε ισοδύναμο που δεν χρησιμοποιεί τους $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Απόδειξη:

B1. Για τον p ισχύει.

B2. Έστω ότι ισχύει για τους p, q . Άρα υπάρχουν ισοδύναμοι p', q' με την παραπάνω ιδιότητα.

B3. Θα δ.ο ισχύει για τους

$\neg p,$
 $p \wedge q,$
 $p \vee q,$
 $p \rightarrow q,$
 $p \leftrightarrow q$

Για τον $\neg p$ και τον $p \vee q$ η πρόταση ισχύει προφανώς.

Για τον $p \wedge q$: Τον μετατρέπουμε σε $\neg(\neg p \vee \neg q)$ και μετά σε $\neg(\neg p' \vee \neg q')$. Όμοια γίνεται η απόδειξη για τα υπόλοιπα.

1. Βασικοί Ορισμοί

Μη Κατευθ. Γράφημα: (V, E) κορυφές $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, ακμές $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ με $e_k = [v_i, v_j]$.

Πλήθος Κορυφών: $n = |V|$, Πλήθος Ακμών: $m = |E|$.

Κατευθ. Γράφημα: (V, E) κορυφές $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, ακμές $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ με $e_k = (v_i, v_j)$.

Απλό Μονοπάτι (Μονοκονδυλιά): Μονοπάτι χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές.

Κύκλος: Είναι ένα μονοπάτι χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές που αρχίζει και τελειώνει στην ίδια κορυφή.

Απλός Κύκλος: Κύκλος χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές.

Απλό Γράφημα: Ένα γράφημα χωρίς ανακυκλώσεις.

Τετριμμένο Γράφημα: Μόνο μια κορυφή.

Πλήρες Γράφημα (Κλίκα) K_n : Είναι το απλό γράφημα n κορυφών που έχει όλες τις δυνατές ακμές. Συνολικά έχει

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ ακμές.}$$

K_3	K_4	K_5
		
Μονοπάτι P_n	Κύκλος C_n	Τροχός W_n



Συνδεδεμένο Γράφημα: Κάθε ζεύγος κορυφών συνδέεται με μονοπάτι. Συνεκτικές Συνιστώσες: Κάθε μη συνδεδεμένο γράφημα αποτελείται από (μεγιστοτικά) συνδεδεμένα υπογραφήματα που λέγονται συνεκτικές συνιστώσες.

Σημείο Κοπής (Αρθρωση): Είναι μια κορυφή που αν αφαιρεθεί μαζί με τις ακμές της κάνει το γράφημα μη συνδεδεμένο.

Γέφυρα (ακμή τομής): Μια ακμή που αν αφαιρεθεί κάνει το γράφημα μη συνδεδεμένο.

Συμπλήρωμα Γραφήματος $\bar{G}$: είναι ένα γράφημα που έχει τις ίδιες κορυφές με το G και ακμές όσες δεν περιέχονται στο G αλλά περιέχονται

3. Διχοτομίσμα - Χρωματισμοί

Διχοτομίσμο (Διμερές): ένα γράφημα του οποίου οι κορυφές μπορούν να χωριστούν σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα (σύνολα ανεξαρτησίας) έτσι ώστε κάθε ακμή να έχει το ένα άκρο στο ένα σύνολο και το άλλο άκρο στο άλλο.

Πλήρες Διχοτομίσμο $K_{m,n}$: ένα διχοτομίσμο γράφημα που περιέχει όλες τις δυνατές ακμές μεταξύ των δύο συνόλων ανεξαρτησίας.

- έχει $m + n$ κορυφές.
- έχει $m \cdot n$ ακμές.

Σύνολο ανεξαρτησίας: ένα σύνολο κορυφών που δεν συνδέονται με ακμή.

Ένα γράφημα καλείται διχοτομίσμο αν και μόνο αν οι κορυφές του διαμερίζονται σε δύο σύνολα ανεξαρτησίας.

Ένα γράφημα είναι διχοτομίσμο αν και μόνο αν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους.

κ-Χρωματίσιμο γράφημα (κ-μερές): ένα γράφημα του οποίου οι κορυφές μπορούν να χρωματιστούν με κ χρώματα έτσι ώστε δύο γειτονικές κορυφές να μην έχουν το ίδιο χρώμα. Δηλαδή αν οι κορυφές του μπορούν να χωριστούν σε κ σύνολα ανεξαρτησίας. αν ένα γράφημα είναι κ χρωματίσιμο, τότε είναι και $\kappa+1$ χρωματίσιμο κ.λ.π.

Χρωματικός Αριθμός $\chi(G)$: είναι το ελάχιστο κ για το οποίο το γράφημα είναι κ χρωματίσιμο. Προφανώς $\chi(K_n) = n$.

6. Πίνακας Πρόσπτωσης

Πίνακας Γειτνίασης Μ.Κ.Γ: είναι ένας πίνακας n επί m με

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{αν η } v_i \text{ είναι άκρο της ακμής } e_j \\ 0, & \text{αν η } v_i \text{ δεν είναι άκρο της } e_j \end{cases}$$

Σε απλά γραφήματα έχουμε 2 «1» σε κάθε στήλη και το άθροισμα κάθε γραμμής είναι ο βαθμός της κορυφής.

Πίνακας Γειτνίασης Κ.Γ: είναι ένας τετραγωνικός πίνακας n επί n με

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{αν η } v_i \text{ είναι αρχή της ακμής } e_j \\ -1, & \text{αν η } v_i \text{ είναι τέλος της ακμής } e_j \\ 0, & \text{αν η } v_i \text{ δεν είναι άκρο της } e_j \end{cases}$$

Σε απλά γραφήματα έχουμε ένα «1» και ένα «-1» σε κάθε στήλη.

2. Λήμμα Χειραψίας

Βαθμός Κορυφής: Είναι το πλήθος των ακμών που προσπίπτουν σε αυτήν. Η ανακύκλωση μετράει για 2!

Έσω Βαθμός $d^-(v)$ (για Κ.Γ.): το πλήθος των εισερχόμενων ακμών.

Έξω Βαθμός $d^+(v)$ (για Κ.Γ.): το πλήθος των εξερχόμενων ακμών.

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m, \quad \text{ή} \quad \sum_{i=1}^n (d^-(v_i) + d^+(v_i)) = 2m$$

Πόρισμα 1: Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών σε κάθε Μ.Κ.Γ. είναι άρτιος αριθμός.

Πόρισμα 2: Σε κάθε Μ.Κ.Γ. το πλήθος των κορυφών που έχουν περιττό βαθμό είναι άρτιος αριθμός.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ: Πώς μπορώ να δω αν μπορεί να κατασκευαστεί γράφημα με συγκεκριμένους βαθμούς κορυφών;

- Ελέγχω τα δύο πορίσματα του Λήμματος Χειραψίας
- Κατασκευάζω το γράφημα ξεκινώντας με τις ακμές τβν κορυφών με τον μεγαλύτερο βαθμό.
- Σε γράφημα n κορυφών δεν γίνεται να υπάρχει κορυφή βαθμού n .
- Σε γράφημα n κορυφών αν υπάρχουν m κορυφές βαθμού $n-1$ τότε όλες οι άλλες κορυφές έχουν βαθμό $\geq m$.

κ – Κανονικό: ένα γράφημα όπου όλες οι κορυφές έχουν βαθμό κ .

$$m = \frac{n \cdot \kappa}{2}$$

4. Κύκλος Euler - Hamilton

Euler: είναι ένας κύκλος που περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος και διέρχεται από κάθε ακμή ακριβώς μια φορά.

Ένα ΜΚΓ έχει κύκλο Euler αν και μόνο αν

- είναι συνδεδεμένο
- όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό.

Hamilton: είναι ένας κύκλος που περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος και περνάει από κάθε κορυφή ακριβώς μια φορά.

Ένα γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton όταν

- δεν είναι συνδεδεμένο
- περιέχει σημείο κοπής
- περιέχει γέφυρα
- έχει μια τουλάχιστον κορυφή βαθμού 1

Κατασκευαστικά: Αφαιρούμε διαδοχικά ακμές με βαθμό > 2 μέχρι όλες να αποκτήσουν βαθμό 2. Παίρνω όλες τις περιπτώσεις και καταλήγω σε άτοπο ή βρίσκω κύκλο Hamilton.

Ένα γράφημα έχει κύκλο Hamilton όταν:

- υπάρχει υπογράφημα που είναι απλός κύκλος (περιέχει όλες τις κορυφές και έχουν όλες βαθμό 2 και είναι τοποθετημένες σε κύκλο C_n).
- κάθε κορυφή έχει βαθμό $\geq \frac{n}{2}$.
- κάθε ζεύγος κορυφών έχει άθροισμα βαθμών $\geq n$.

Το απλούστερο μη τετριμμένο γράφημα που δεν έχει κύκλο Hamilton:



5. Πίνακας Γειτνίασης

Πίνακας Γειτνίασης Μ.Κ.Γ: είναι ένας τετραγωνικός πίνακας n επί n με

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{αν } [v_i, v_j] \in E \\ 0, & \text{αν } [v_i, v_j] \notin E \end{cases}$$

ο A είναι συμμετρικός. το άθροισμα μιας γραμμής ή μιας στήλης είναι ίσο με τον βαθμό της αντίστοιχης κορυφής. Το άθροισμα όλων των στοιχείων είναι $2m$.

Πίνακας Γειτνίασης Κ.Γ: είναι ένας τετραγωνικός πίνακας n επί n με

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{αν } (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{αν } (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

ο A δεν είναι συμμετρικός. το άθροισμα μιας γραμμής είναι ίσο με τον έξω βαθμό της αντίστοιχης κορυφής, το άθροισμα μιας στήλης είναι ίσο με τον έσω βαθμό της αντίστοιχης κορυφής. Το άθροισμα όλων των στοιχείων είναι $2m$.

Δυνάμεις: το (i, j) στοιχείο δίνει

A^k : πλήθος μονοπατιών μήκους k από την i στην j .

$A + A^2 + A^3 + \dots + A^k$: πλήθος μονοπατιών μήκους το πολύ k που υπάρχουν από την i στην j .

Στον πίνακα $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{n-1}$ αν κάποιο μη διαγώνιο στοιχείο είναι ίσο με 0, τότε το γράφημα δεν είναι συνδεδεμένο.

7. Ισομορφισμοί

Ορισμός: Δύο γραφήματα λέγονται ισομορφικά αν υπάρχει συνάρτηση 1-1 και επί μεταξύ των κορυφών τους έτσι ώστε αν δύο κορυφές στο αρχικό γράφημα συνδέονται να συνδέονται και οι αντίστοιχες κορυφές του άλλου γραφήματος.

Οι πίνακες γειτνίασης δύο ισομορφικών γραφημάτων ταυτίζονται αν κάνουμε κάποια αναδιάταξη γραμμών.

Δύο γραφήματα δεν είναι ισόμορφα αν κάποια από τις αναλλοίωτες ιδιότητες ισχύει στο ένα γράφημα και δεν ισχύει στο άλλο

- Το γράφημα έχει n κορυφές
- Το γράφημα έχει m ακμές
- Το γράφημα έχει λ κορυφές βαθμού k
- Το γράφημα έχει απλό κύκλο μήκους k
- Το γράφημα έχει κύκλο Euler
- Το γράφημα έχει κύκλο Hamilton
- Το γράφημα είναι συνδεδεμένο
- Το γράφημα είναι επίπεδο

Ταυτοτικός Ισομορφισμός: ένας ισομορφισμός από ένα γράφημα στον εαυτό του. Το K_n έχει $n!$ αυτομορφισμούς. Το $K_{n,m}$ έχει $n!m!$ αυτομορφισμούς.

Αυτοσυμπληρωματικό: καλείται ένα γράφημα αν είναι ισόμορφο με το συμπλήρωμά του. Ένα τέτοιο γράφημα έχει $\frac{n(n+1)}{4}$ ακμές και $n = 4k$, ή $n = 4k - 1$ κορυφές.

8β. Επίπεδα Γραφήματα – Ασκήσεις ΧΡΕΙΑΖΟΜΑΣΤΕ ΜΙΑ ΔΙΠΛΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

$$? \leq \sum_{k=1}^o d(o_k) \leq 2m$$

1. Δείξτε ότι $m \leq 3n - 6$

Θα έχω $d(o_k) \geq 3$ για κάθε όψη $k=1,2,\dots,o$. Άρα

$$3o \leq \sum_{k=1}^o d(o_k) \leq 2m$$

Επίσης $o = m - n + 2$, άρα

$$3o \leq 2m \Leftrightarrow 3(m - n + 2) \leq 2m \Leftrightarrow 3m - 3n + 6 \leq 2m \Leftrightarrow m \leq 3n - 6$$

2. Δ.Ο. δεν υπάρχει επίπεδο γράφημα με $m > 2n - 4$ που να μην περιέχει κύκλους μήκους μικρότερου του 4.

Εστω ότι υπάρχει τέτοιο γράφημα. Δηλαδή έχω $d(o_k) \geq 4$ για κάθε όψη $k=1,2,\dots,o$. Οπότε

$$4o \leq \sum_{k=1}^o d(o_k) \leq 2m \Leftrightarrow 4o \leq 2m \Leftrightarrow 2o \leq m.$$

Επίσης, $o = m - n + 2$, άρα $2o \leq m \Leftrightarrow$

$$2(m - n + 2) \leq m \Leftrightarrow 2m - 2n + 4 \leq m \Leftrightarrow m \leq 2n - 4. \text{ Ατοπο.}$$

3. Δείξτε ότι κάθε απλό επίπεδο γράφημα με λιγότερες από 12 κορυφές έχει μια κορυφή βαθμού το πολύ 4.

Εστω ότι υπάρχει απλό επίπεδο γράφημα με $n < 12$ και με όλες τις κορυφές να έχουν βαθμό πάνω από 4. Δηλαδή $d(v_i) \geq 5$, $i=1,2,\dots,n$. Άρα $\sum_{i=1}^n d(v_i) \geq 5n$ και από Λήμμα Χειραψίας $\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$.

Οπότε $2m \geq 5n \Leftrightarrow m \geq \frac{5}{2}n$. Επίσης, $m \leq 3n - 6$, οπότε

$$\frac{5}{2}n \leq 3n - 6 \Leftrightarrow 5n \leq 6n - 12 \Leftrightarrow n \geq 12. \text{ Ατοπο.}$$

4. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνδεδεμένο απλό 3-κανονικό επίπεδο γράφημα που να περιέχει ακριβώς δύο φορές το C_3 ως επαγόμενο υπογράφημα και έχει λιγότερες από 6 κορυφές.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει τέτοιο γράφημα. Δηλαδή, ότι $n \leq 5$, υπάρχουν 2 όψεις με βαθμό ακριβώς 3 (οι δύο κύκλοι) και οι άλλες όψεις έχουν βαθμό μεγαλύτερο του 3. Επίσης, υποθέτουμε ότι $d(v_i) = 3$, $i=1,2,\dots,n$. Θα έχω $\sum_{i=1}^n d(v_i) = 3n$ και από λήμμα χειραψίας $\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$.

Δηλαδή $3n = 2m \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}n$. για τις όψεις θα έχω:

$$\sum_{k=1}^o d(o_k) \geq 3 + 3 + (o - 2) \cdot 4 = 4o - 2.$$

και $\sum_{k=1}^o d(o_k) \leq 2m$. Άρα $4o - 2 \leq \sum_{k=1}^o d(o_k) \leq 2m$. Από εδώ

$$\text{προκύπτει } 4o - 2 \leq 2m \Leftrightarrow 2o - 1 \leq m \xrightarrow{o=m-n+2} 2m - 2n + 4 - 1 \leq$$

$$m \Leftrightarrow m \leq 2n - 3 \xrightarrow{m=\frac{3}{2}n} \frac{3}{2}n \leq 2n - 3 \Leftrightarrow 3n \leq 4n - 6 \Leftrightarrow n \geq 6.$$

Άτοπο!

8. Επίπεδα Γραφήματα

Ορισμός: ένα γράφημα καλείται επίπεδο αν μπορούμε να το απεικονίσουμε στο επίπεδο χωρίς να τέμνονται οι ακμές του.

Όψη, εξωτερική όψη, βαθμός όψης

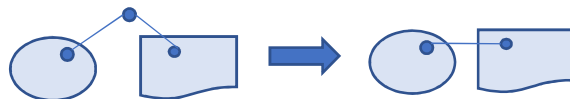
Συμβολισμοί: n κορυφές, m ακμές, o όψεις

- $\sum_{k=1}^o d(o_k) \leq 2m$
- $o = m - n + 2$ (τύπος Euler – ισχύει για συνδεδεμένα)
- $m \leq 3n - 6$ (ισχύει για απλά και συνδεδεμένα)

Θεώρημα Kuratowski

- Τα K_5 , $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδα.
- Ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει ως υπογράφημα το K_5 , ή το $K_{3,3}$ ή ομοιομορφικό αυτών.

Ομοιομορφικά Γραφήματα: Δύο γραφήματα καλούνται ομοιομορφικά αν μπορούν να απλοποιηθούν με διαδοχικές απλοποιήσεις σειράς σε ισόμορφα γραφήματα. **Απλοποίηση σειράς** λέμε μια πράξη που αντικαθιστά μια κορυφή βαθμού 2 με μια ακμή.



Κάθε επίπεδο γράφημα είναι 4 – χρωματίσιμο.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: Στα επίπεδα γραφήματα οι κύκλοι μήκους k είναι όψεις βαθμού k . Επίσης $d(o) \geq 3$.

8γ. Μεθοδολογία (Ασκήσεις με τύπους)

Βήμα 1: Καταγράφω τις γνωστές σχέσεις για τα n , m , o . Αν έχω δύο ή περισσότερες κατηγορίες κορυφών ή όψεων τότε αναφέρω ότι

- $o = o_1 + o_2$ ή
- $n = n_1 + n_2$

και γράφω τι ισχύει για κάθε μεταβλητή ξεχωριστά. Τονίζουμε ότι το μήκος των υπάρχοντων κύκλων ταυτίζεται με το βαθμό των όψεων.

Βήμα 2: Αν η άσκηση εμπλέκει τον βαθμό όψεων τότε πρέπει να φτιάξω μια διπλή ανισότητα με το άθροισμα των βαθμών.

Δεξιά βάζω πάντα το $2m$, δηλαδή

$$\sum_{k=1}^o d(o_k) \leq 2m \quad (\text{άνω φράγμα})$$

και αριστερά κάτι σχετικό με τις πληροφορίες που δίνει η άσκηση.

$$\sum_{k=1}^o d(o_k) \geq f(o) \quad (\text{κάτω φράγμα})$$

Εδώ τώρα πρέπει να υπολογίσω την παράσταση $f(o)$ η οποία θα εξαρτάται από τις όψεις. Π.χ.

- αν όλες οι όψεις έχουν βαθμό πάνω από 5 βάζω $f(o) = o \cdot 5$
- αν έχω ακριβώς 2 όψεις βαθμού 5 (και όλες οι υπόλοιπες είναι πάνω από 3) βάζω $f(o) = 2 \cdot 5 + (o - 2) \cdot 3$
- αν έχω μόνο όψεις βαθμού 3 και όψεις βαθμού 5 τότε χωρίζω τις όψεις σε o_3 , o_5 και βάζω $f(o) = o_3 \cdot 3 + o_5 \cdot 5$

Θα πάρω μια σχέση της μορφής $f(o) \leq \sum_{k=1}^o d(o_k) \leq 2m$. Από αυτή τη σχέση παίρνω μόνο τα ακριανά μέλη και τα επεξεργάζομαι:

$$f(o) \leq 2m.$$

Βήμα 3: Αν η άσκηση εμπλέκει όψεις τότε χρησιμοποιώ και τον τύπο του Euler, $o = m - n + 2$.

Βήμα 4: Αν η άσκηση εμπλέκει βαθμούς κορυφών, τότε χρησιμοποιούμε το λήμμα Χειραψίας: $\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$. Υπολογίζω το αριστερό μέλος και παίρνω μια εξίσωση για το n το m .

Βήμα 5: Πρέπει να συνδυάσω τις παραπάνω σχέσεις για να καταλήξω στο ζητούμενο αποτέλεσμα. Συνήθως, αντικαθιστώ τις σχέσεις από τον τύπο του Euler και από το λήμμα χειραψίας στον τύπο της ανίσωσης που προκύπτει από τους βαθμούς των όψεων.

9. Δέντρα

Ορισμός: ένα γράφημα είναι δέντρο αν και μόνο αν υπάρχει μοναδικό απλό μονοπάτι από κάθε κορυφή σε κάθε άλλη.

Βασικές έννοιες:

- **Επίπεδο** (βάθος κορυφής): η απόσταση από τη ρίζα.
- **Ύψος:** Μέγιστο επίπεδο κορυφής
- **Βαθμός** Δέντρου: μέγιστος βαθμός κορυφής
- **Φύλλο** (τερματική κορυφή ή μενταγιόν) μια κορυφή βαθμού 1.
- **Εσωτερική κορυφή** (διακλάδωση): κορυφή με βαθμό >1

Σε ένα δέντρο χωρίζουμε τις κορυφές σε δύο κατηγορίες. Τα **φύλλα** (φ) και τις **εσωτερικές** κορυφές (ε). Προφανώς ισχύει $n = \varphi + \varepsilon$.

Δάσος: ένα γράφημα λέγεται δάσος αν είναι ένωση δέντρων. Ένα δάσος κ δέντρων έχει $n-k$ ακμές.

Θεώρημα Δέντρων: TAEI:

- Το γράφημα G είναι δέντρο.
- Το γράφημα είναι συνδεδεμένο και δεν περιέχει κύκλους.
- Το γράφημα είναι συνδεδεμένο και έχει $n-1$ ακμές
- Το γράφημα δεν περιέχει κύκλους και έχει $n-1$ ακμές.
- Το γράφημα είναι ελαχιστοτικά συνδεδεμένο. (δηλαδή αν του αφαιρέσω μια οποιαδήποτε ακμή θα γίνει μη συνδεδεμένο)
- Το γράφημα είναι μεγιστοτικά άκυκλο (αν του προσθέσω μια ακμή μεταξύ δύο οποιονδήποτε κορυφών θα γίνει κύκλος)

Παρατηρήσεις:

- Κάθε δέντρο είναι απλό γράφημα
- Κάθε δέντρο είναι διχοτομίσσιμο
- Κάθε δέντρο είναι επίπεδο.
- Κάθε δέντρο με $n \geq 2$ έχει τουλάχιστον δύο φύλλα
- Κάθε δέντρο με $n > 2$ έχει τουλάχιστον μια εσωτερική κορυφή.
- Αν μια κορυφή έχει βαθμό k τότε το δέντρο έχει k φύλλα
- Κάθε εσωτερική κορυφή είναι σημείο κοπής
- Κάθε ακμή είναι γέφυρα
- Αν αφαιρέσουμε ένα φύλλο, τότε το γράφημα που προκύπτει είναι δέντρο
- Κάθε μεγιστοτικό μονοπάτι ξεκινάει και καταλήγει σε φύλλο.

Προσοχή στα τετριμένα δέντρα με 1, 2 και 3 κορυφές!!!

Ασκήσεις με Επαγωγή:

Βάση Επαγωγής: Ξεκινάω με το μικρότερο αριθμό κορυφών και κατασκευάζω όλα τα γραφήματα που ικανοποιούν τις υποθέσεις τις άσκησης. Αποδεικνύω ότι ικανοποιούν και το συμπέρασμα.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτω ότι όλα τα γραφήματα με n κορυφές που ικανοποιούν τι προϋποθέσεις της άσκησης ικανοποιούν το συμπέρασμα.

Επαγωγικό Βήμα: Θεωρώ ένα γράφημα με $n+1$ κορυφές για το οποίο ισχύουν οι προϋποθέσεις και παίρνω ένα υπογράφημά του με n κορυφές. Αποδεικνύω ότι αφού το υπογράφημα ικανοποιεί το συμπέρασμα θα ικανοποιεί το συμπέρασμα και το μεγάλο γράφημα που έχει μια παραπάνω κορυφή.

Στα δέντρα θεωρώ ένα δέντρο n κορυφών (για το οποίο θα ισχύει η υπόθεση) και του προσθέτω μια κορυφή ακόμη. Πρέπει να δείξω ότι και για το νέο δέντρο ισχύει η υπόθεση.

Άσκηση 4: Δείξτε με επαγωγή ότι κάθε δέντρο με τουλάχιστον 2 κορυφές είναι διχρωματίσιμο γράφημα.

- Για $n=2$ η σχέση είναι πραφανής (έχω το γράφημα με δύο κορυφές).
- Θεωρώ ότι για $n = n$ η σχέση ισχύει. Δηλαδή κάθε δέντρο n κορυφών είναι διχρωματίσιμο.
- Για $n = n + 1$ θα έχουμε. Θεωρούμε ένα δέντρο n κορυφών το οποίο είναι διχρωματίσιμο (υπόθεση επαγωγής). Συνδέουμε μια κόμη κορυφή στο δέντρο σε οποιαδήποτε άλλη κορυφή του. Αναθέτουμε στη νέα κορυφή το αντίθετο χρώμα από αυτό της κορυφής με την οποία συνδέεται. Άρα το νέο γράφημα παραμένει διχρωματίσιμο.

9β. Μεθοδολογία Δέντρα

Κατασκευές: Κατασκευάζουμε τα δέντρα παίρνοντας περιπτώσεις για τους πιθανούς βαθμούς των εσωτερικών κορυφών. Ελέγχω πρώτα αν ισχύει η σχέση $m = n - 1$ για τα δέντρα ή $m = n - k$ για τα δάση.

Άσκηση 1. Φτιάξτε όλα τα μη ισόμορφα δέντρα με 6 κορυφές

Διακρίνω περιπτώσεις ως ορις τις εσωτερικές κορυφές

- 4 εσωτερικές με βαθμό 2 και δύο φύλλα
- 1 εσωτερική με βαθμό 3, 2 εσωτερικές με βαθμό 2 και 3 φύλλα (υπάρχουν δύο τέτοια δέντρα)
- 2 εσωτερικές με βαθμό 3 και 4 φύλλα (1 δέντρο)
- 1 εσωτερική με βαθμό 4 (1 δέντρο)
- 1 εσωτερική με βαθμό 5 (1 δέντρο)

Ασκήσεις με βαθμούς κορυφών:

Βήμα 1: Χωρίζω τις κορυφές σε κατηγορίες. Συνήθως ο χωρισμός αυτός είναι σε φύλλα (φ) και εσωτερικές κορυφές (ε). Αλλά μπορεί να χρειαστεί να έχουμε δύο είδη εσωτερικών κορυφών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, αν π.χ. έχουμε διαφορετικούς βαθμούς.

Δεν ξεχνώ ότι $n = \varphi + \varepsilon$, ή $n = \varphi + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

Βήμα 2: Στη συνέχεια παίρνω το λήμμα χειραψίας $\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$ χωρίζοντας τους βαθμούς των κορυφών κατάλληλα (τα φύλλα έχουν βαθμό 1) κατάλληλα. Για παράδειγμα:

- αν έχω εσωτερικές κορυφές βαθμού το πολύ k και φύλλα θα έχω $\varepsilon \cdot k + \varphi \leq 2m$
- αν έχω εσωτερικές κορυφές βαθμού k και φύλλα θα έχω $\varepsilon \cdot k + \varphi = 2m$
- αν έχω εσωτερικές κορυφές βαθμού 3 ή 5 τότε θα έχω $\varepsilon_3 \cdot 3 + \varepsilon_5 \cdot 5 + \varphi = 2m$

Βήμα 3: Βέβαια δεν ξεχνω ότι στα δέντρα έχω $m = n - 1$. Αντικαθιστώ το m στον τύπο του λήμματος και προχωρώ τις σχέσεις.

Άσκηση 2. Θεωρούμε ένα δέντρο με κρυφές που έχουν είτε βαθμό 3 είτε βαθμό 1. Δείξτε ότι το δέντρο πρέπει να έχει άρτιο αριθμό κορυφών και ακριβώς $(n-2)/2$ κορυφές βαθμού 3.

Θεωρώ ότι n_1 είναι τα φύλλα και n_2 οι κορυφές βαθμού 3. Τότε από το λήμμα χειραψίας και το πλήθος ακμών δέντρου ($m = n - 1$)θα έχουμε:

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m \Leftrightarrow n_1 + 3n_2 = 2m \Leftrightarrow \varphi$$

Επίσης, αφού όλες οι κορυφές έχουν περιττό βαθμό τότε θα πρέπει το πλήθος τους να είναι άρτιος (πόρισμα λήμματος Χειραψίας). Δηλαδή $n_1 + n_2 = \text{άρτιος}$. Πρέπει να υπολογίσω το n_2 . Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $n_1 + n_2 = n$, θα έχω $n_1 = n - n_2$ και άρα το λήμμα χειραψίας γίνεται $n - n_2 + 3n_2 = 2(n - 1) \Leftrightarrow n + 2n_2 = 2n - 2 \Leftrightarrow 2n_2$

$$= n - 2 \Leftrightarrow n_2 = \frac{n - 1}{2}$$

Άσκηση 3: Έστω T ένα δέντρο στο οποίο το πλήθος των κορυφών με βαθμό i είναι p_i για $i=1,2,\dots,\Delta$, όπου Δ ο μέγιστος βαθμός του δέντρου. Δείξτε ότι

$$p_1 = p_3 + 2p_4 + 3p_5 + \dots + (\Delta - 2)p_\Delta + 2$$

10. Dijkstra

Βρίσκει το συντομότερο μονοπάτι από μια αφετηρία s σε έναν τερματισμό t μέσα σε ένα κατευθυνόμενο ή μη κατευθυνόμενο γράφημα με βάρη.

Αρχικοποίηση: Όλοι οι κόμβοι έχουν αρχικό βάρος $L[v] = +\infty$, εκτός από την αφετηρία με $L[s] = 0$. Επίσης σε κάθε κόμβο αρχικοποιούμε τον προηγούμενο στο κενό, $P[v] = \dots$.

Επανάληψη:

- Οριστικοποιώ την κορυφή με το μικρότερο βάρος $L[v]$ (ανάμεσα σε όλες όσες δεν έχουν οριστικοποιηθεί ακόμη).
- Διορθώνονται όλα τα βάρη των γειτονικών μη οριστικοποιημένων κορυφών (αν βρεθεί καλύτερο μονοπάτι) προσθέτωντας στο $L[v]$ το βάρος της αντίστοιχης ακμής. Επίσης αλλάζω και τις ετικέτες $P[v]$ τοποθετώντας κορυφές που έχουν οριστικοποιηθεί και οδηγούν στις νέες κορυφές.

Τερματισμός: όταν οριστικοποιηθεί η κορυφή t .

Παρατηρήσεις:

- Σε κάθε κορυφή που οριστικοποιείται έχω και το βέλτιστο μονοπάτι από την αφετηρία μέχρι αυτή την κορυφή.
- Αν οριστικοποιήσουμε όλες τις κορυφές παίρνουμε **το δέντρο ελάχιστων μονοπατιών** από την s .
- Ο αλγόριθμος δεν δουλεύει με αρνητικά βάρη.
- Αν προσθέσουμε σε κάθε ακμή του γραφήματος το ίδιο θετικό βάρος το συντομότερο μονοπάτι μπορεί να αλλάξει.
- Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε ακμή του γραφήματος με τον ίδιο θετικό αριθμό το συντομότερο μονοπάτι μένει το ίδιο.
- Κάθε υπομονοπάτι ενός βέλτιστου μονοπατιού είναι το ίδιο βέλτιστο.

11. Συνδυετικά Δέντρα

Ορισμός: σε ένα συνδεόμενο ΜΚΓ ορίζουμε ως συνδυετικό δέντρο του γραφήματος ένα υπογράφημα που είναι δέντρο και περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος.

Αλγόριθμοι υπολογισμού συνδυετικού δέντρου:

- 1. Απλός:** κόβω ακμές που κάνουν κύκλους έτσι ώστε το γράφημα να παραμένει συνδεόμενο.
- 2. Αλγόριθμος Διάσχισης κατά Πλάτος:**

Αρχικοποίηση: Τοποθετώ αυθαίρετα μια κορυφή στο $\Sigma.\Delta$.

Επανάληψη:

 - Επιλέγω μια τρέχουσα κορυφή (με βάση τη σειρά εισαγωγής στο δέντρο)
 - Κάθε γειτονική κορυφή μπαίνει στο δέντρο ως παιδί της προηγούμενης κορυφής με αυθαίρετη σειρά.

Τερματισμός: Όταν μπουν όλες οι κορυφές στο $\Sigma.\Delta$.
- 3. Πρώτα κατά Βάθος**

Αρχικοποίηση: Τοποθετώ αυθαίρετα μια κορυφή στο $\Sigma.\Delta$ (τρέχουσα κορυφή).

Επανάληψη:

 - Πηγαίνω σε μια γειτονική κορυφή (της τρέχουσας) και την τοποθετώ στο δέντρο. Αυτή η κορυφή είναι η νέα τρέχουσα κορυφή.
 - Αν δεν υπάρχει άλλη γειτονική κορυφή που δεν έχει μπει στο $\Sigma\Delta$ τότε πηγαίνω στην αμέσως προηγούμενη της τρέχουσας.

Τερματισμός: Όταν μπουν όλες οι κορυφές στο $\Sigma.\Delta$.

Ελάχιστο Συνδυετικό Δέντρο: σε ένα συνδεόμενο ΜΚΓ με βάρη το ΕΣΔ είναι ένα υπογράφημα του γραφήματος που είναι $\Sigma\Delta$ και έχει το ελάχιστο άθροισμα βαρών από όλα τα άλλα $\Sigma\Delta$.

- 2. Αλγόριθμος Prim:**

Αρχικοποίηση: Τοποθετώ αυθαίρετα μια κορυφή στο $\Sigma.\Delta$.

Επανάληψη:

 - Ελέγχουμε όλες τις ακμές με μια κορυφή στο $\Sigma\Delta$ και την άλλη εκτός $\Sigma\Delta$. Επιλέγω την ακμή με το μικρότερο βάρος.
 - Εισάγω στο $\Sigma\Delta$ την ακμή αυτή και την κορυφή.

Τερματισμός: Όταν μπουν όλες οι κορυφές στο $\Sigma.\Delta$.

Παρατηρήσεις για τον Prim:

- Δουλεύει και με αρνητικά βάρη.
- Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε ακμή με τον ίδιο θετικό αριθμό το ΕΣΔ διατηρείται.
- Αν προσθέσουμε τον ίδιο θετικό αριθμό σε κάθε βάρος τότε το ΕΣΔ διατηρείται.

	Dijkstra	Prim	Κατά Βάθος	Κατά Πλάτος
Συντομότερα Μονοπάτια	NAI	OXI	OXI	MONO AN OΛA TA BAPH EINAI IDIA
Ελάχιστο Συνδυετικό Δέντρο	MONO AN OΛA TA BAPH EINAI IDIA	NAI	MONO AN OΛA TA BAPH EINAI IDIA	MONO AN OΛA TA BAPH EINAI IDIA
Συνδυετικό Δέντρο	NAI	NAI	NAI	NAI